Determinanten

Erinnerung: Bei der Berechnung der Inversen einer (2×2)-Matrix (Blatt 32) konnte man aus allen Gleichungen den Ausdruck $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ausklammern, die Inverse A^{-1} konnte wie folgt dargestellt werden:

$$A^{-1} = \frac{1}{D} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

D ist eine reelle Zahl, die sich aus den Koeffizienten der Matrix berechnen lässt, und zwar aus allen Koeffizienten.

Diese Kennzahl heißt **Determinante**

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $\quad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$

heißt die Determinante von A

Sei $A = (a_{11})$, dann ist $\det A = a_{11}$

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, dann ist $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, dann ist

$$\begin{aligned} \det A = {} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ & + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} \\ & - a_{12}a_{21}a_{33} \\ & - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

Schauen wir uns diesen Ausdruck etwas genauer an:

6 Summanden mit jeweils 3 Faktoren, die jeweils aus unterschiedlichen Zeilen stammen. („grün" unterstrichen)

Wie die zweiten Indizes zu wählen sind, wird durch die allgemeine Definition klar:

Def. (Determinante einer $(m \times m)$-Matrix) (m-reihige Determinante)

Sei A eine $(m \times m)$-Matrix, dann ist

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{P(j)} (-1)^{I(j)} a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{mj_m}$$

$P(j)$: Permutationen des zweiten Index j (Spaltenindex)

$I(j)$: Zahl der Inversionen der jeweiligen Permutation, bestimmt das Vorzeichen des Summanden.

[Def. (Inversion): Zwei Elemente einer Permutation bilden eine Inversion, wenn sie nicht in ihrer natürlichen Anordnung stehen]

Bem: Wir betrachten die Determinante einer (3×3)-Matrix (3-reihige Determinante)

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Anzahl Inversionen des zweiten Index: 0 2 2 1 1 1

Bem: 3-reihige Determinante: 6 (3!) Summanden mit jeweils 3 Faktoren

4-reihige Determinante: 24 (4!) Summanden mit jeweils 4 Faktoren

5-reihige Determinante: 120 (5!) Summanden mit jeweils 5 Faktoren

Man benötigt dringend Regeln, die das Berechnen von Determinanten vereinfachen.

Regel zur Berechnung 3-reihiger Determinanten:

Regel von Sarrus

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + \; - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

man fügt die ersten beiden Spalten an (grün) und bildet die aus drei Faktoren bestehenden 6 Summanden "diagonal" rot: + blau: −

Produkte der Hauptdiagonalen:

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

minus Produkte der Nebendiagonalen:

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Bp: Berechnen Sie: $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 8 \end{vmatrix}$

Ergebnis: -83

Eigenschaften von Determinanten, die später die Rechnung für höherreihige Determinanten erleichtern:

1) Vertauschen zweier benachbarter Zeilen ändert das Vorzeichen der Determinante
Vertauscht man mehrere Zeilen, so ändert sich das Vorzeichen nur, wenn eine ungerade Anzahl Vertauschungen vorgenommen wurde. $\det A_{P(i)} = (-1)^{I(i)} \det A$

2) Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda \det A$

dagegen: $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^m \cdot \det A$

3) Addition zweier Determinanten

Zwei Determinanten derselben Ordnung, die sich in nur einer Zeile unterscheiden werden addiert, indem die beiden unterschiedlichen Zeilen koeffizientenweise addiert werden:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

4) Addition des λ-fachen einer Zeile zu einer anderen Zeile

Der Wert der Determinante ändert sich dadurch nicht.

Veranschaulichung am Beispiel einer zweizeiligen Determinante

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}_{\downarrow} + \lambda(a_{11}\ a_{12}) \rightarrow \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+\lambda a_{11} & a_{22}+\lambda a_{12} \end{vmatrix}}_{\downarrow}$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$a_{11}(a_{22}+\lambda a_{12}) - a_{12}(a_{21}+\lambda a_{11})$$

$$= a_{11}a_{22} + \cancel{\lambda a_{11}a_{12}} - a_{12}a_{21} - \cancel{\lambda a_{12}a_{11}}$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

5) Sind Zeilen in einer Matrix A linear abhängig, so ist $\det A = 0$

Frage: Können Sie das erklären?

Antwort: Sind Zeilen linear abhängig, so kann man die Matrix so umformen, dass eine Zeile nur aus Nullen besteht (s. Rangbestimmung)
Die Determinante besteht aus Summanden, die Faktoren aus jeder Zeile der Matrix haben, also auch immer eine 0, damit ist
$\det A = 0$

Eine 4-reihige Determinante berechnet sich aus 24 Summanden mit je 4 Faktoren, eine 5-reihige aus 120 Summanden mit je 5 Faktoren, das schafft man "auf die Schnelle" nicht mehr. (Blatt 58)

Es sollen Möglichkeiten vorgestellt werden, um "höherreihige" Determinanten einfacher zu berechnen.

Dazu einige Grundlagen:

1) Adjunkte und Adjungierte Matrix

Erinnerung: Untermatrix (Blatt 25)

Entsprechend kann man durch Streichen von Zeilen und Spalten in einer Determinante Unterdeterminanten erzeugen. Dazu ist es notwendig, stets gleich viele Zeilen und Spalten zu streichen, da die Unterdeterminante auch wieder quadratisch sein muss.

Von besonderer Bedeutung sind Unterdeterminanten (m-1)ter Ordnung, entstehen durch Streichen einer Zeile und einer Spalte.

Def.: Die Unterdeterminante (m-1)-ter Ordnung zum Element a_{ij} (Streichung der i-ten Zeile und der j-ten Spalte) wird als Minor bezeichnet: $|A|_{ij}$

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{i1} & & a_{ij} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mj} & & a_{mm} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \end{array} \\ j\text{-te Spalte} \end{array} \qquad |A|_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & & & & & \\ a_{i+11} & & & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj-1} & a_{mj+1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

Frage: Wieviele Minoren besitzt eine Determinante m-ter Ordnung?

Antwort: m^2 Minoren

Bp.: Berechnen Sie alle Minoren von $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 7 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Rechnung: $|A|_{11} = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad |A|_{12} = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \quad |A|_{13} = \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$|A|_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad |A|_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad |A|_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$

$|A|_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -6 \quad |A|_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 5 \quad |A|_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 18$

9 Minoren

Def: Adjunkte zum Element a_{ij}

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \, |A|_{ij}$$

Bem: $(-1)^{i+j}$ beschreibt ein Vorzeichenmuster, das auf die Minoren angewendet wird.

$$\begin{matrix} + & - & + & - & + & \dots \\ - & + & - & & & \\ + & - & + & & & \vdots \\ - & & & & & \\ + & & & & & \ddots \\ \vdots & & & & & \end{matrix}$$

Bei der Adjunkten handelt es sich um eine reelle Zahl.

Fasst man alle Adjunkten zu einer Matrix zusammen, und bildet davon die Transponierte, so erhält man die zu A adjungierte Matrix: A_{ad}

Bp. (s.o.) Minoren <u>mit</u> Vorzeichenmuster:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ +1 & 2 & -3 \\ -6 & -5 & 18 \end{pmatrix} \longrightarrow A_{ad} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -6 \\ -3 & 2 & -5 \\ 1 & -3 & 18 \end{pmatrix}$$

Mit den Kenntnissen über Adjunkte kann man nun eine Methode formulieren, schnell höherreihige Determinanten zu berechnen.

Der Entwicklungssatz von Laplace

Eine Determinante $|A|$ m-ter Ordnung kann entweder nach einer Zeile i oder einer Spalte j "entwickelt" werden

a) Entwicklung nach der Zeile i:

$$\det A = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot A_{ij} = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |A|_{ij}$$

b) Entwicklung nach der Spalte j:

$$\det A = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot A_{ij} = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} |A|_{ij}$$

Frage: Was sagen die Formeln?

Antwort: Schrittweise Reduzierung der Ordnung der Determinante

Bp: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det A \underset{\uparrow}{=} 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach der 1. Zeile

$$= 2 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 0 = 12$$

$$\det A \underset{\uparrow}{=} 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach der 3. Spalte

$$= 0 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 8 = 12$$

Mit dem Entwicklungssatz von Laplace hat man ein gutes Hilfsmittel zur Hand, die Berechnung von Determinanten m-ter Ordnung auf die Berechnung von Determinanten (m−1)ter Ordnung zurückzuführen, dies kann so lange fortgesetzt werden, bis man bei einer Determinante 3. Ordnung (→ Regel von Sarrus) oder einer Determinante 2. Ordnung angelangt ist.

Tipp: Auswahl von Zeilen bzw. Spalten mit vielen Nullen vermindert den Rechenaufwand.

Bp: $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$\det A \underset{\substack{\text{Entw. nach} \\ \text{der 2. Zeile}}}{=} (-1)\cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{Entw. 4. Zeile}}{=} (-1)\cdot(-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{Entw. 1. Zeile}}{=} (-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \cdot 2 = -2$$

Tipp: Sind nur wenig Nullen in Zeilen oder Spalten einer höherreihigen Determinante, dann empfiehlt es sich, vorab Umformungen vorzunehmen, um auf mehr Nullen in einer Zeile oder Spalte zu kommen.

So bietet sich an, eine Dreiecksform zu erzeugen.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & & a_{1m} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & a_{mm} \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{Entw.} \\ \text{1. Spalte}}}{=} a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}\cdots a_{mm}$$

Man nennt dieses Vorgehen: Triangulieren

Bei allen Umformungen, die an Determinanten vorgenommen werden, ist darauf zu achten, ob sich das Vorzeichen ändert (durch eine ungerade Anzahl von Vertauschen benachbarter Zeilen oder Spalten bzw. ob mit einem $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert werden muss, falls eine Zeile mit einem $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert wurde

Bp:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2.\text{Zeile} \\ \\ +2\times 2.\text{Zeile} \end{matrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -\tfrac{1}{2}\cdot 3.\text{Zeile} \\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ +4.\text{Zeile} \end{matrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9/2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9/2 \end{vmatrix} = \underbrace{(-1)^3}_{\text{3 Spalten-vertauschungen}} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 9/2$$

$$= -36$$

Determinante und Inverse einer Matrix

- A regulär $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$ (s. Blatt 60)

- A regulär $\Rightarrow$ A besitzt eine Inverse
  und $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A_{ad}$ (s. Blatt 62)

Bp. in den Übungen

Zum Schluss: Cramer'sche Regel

Zur Lösung eines linearen Gleichungssystems
Für die Praxis von keiner großen Bedeutung.

Geg.: $A\vec{x} = \vec{b}$ (A ist eine $(m \times m)$-Matrix)

Ersetzt man in der Matrix A die Spalte j durch den Lösungsvektor, so heiße die neue Matrix A_j

Die Cramer'sche Regel lautet:

Die Lösungen von $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ können wie folgt berechnet werden: $x_j = \frac{\det A_j}{\det A}$ $j = 1, \dots, m$
$\det A \neq 0$

Der Rechenaufwand, ein LGS mit dieser Regel zu lösen, ist enorm groß, es müssen $m+1$ Determinanten berechnet werden. Daher die geringe Praxisrelevanz.