

Grenzwerte von Folgen und Funktionen

- 1) Berechnen Sie folgenden Grenzwert: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5 - 3n^2}{2n^2 + 2n} + \frac{(n-2)^2}{n^2} \right) \quad n \in \mathbb{N}$
- 2) Berechnen Sie folgenden Grenzwert: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \sin(x)}{x^3} \right) \quad x \in \mathbb{R}$
- 3) Berechnen Sie folgenden Grenzwert: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^3}{1 + n^2 + 4n^3} + \frac{n^5}{6 + 4n^4 - n^5} \right) \quad n \in \mathbb{N}$
- 4) Berechnen Sie folgenden Grenzwert: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln(2x-1)}{e^x} \right) \quad x \in \mathbb{R}$
- 5) Berechnen Sie folgenden Grenzwert: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(\frac{x^2 - 2x + 5}{\cos(x)} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \right) \right) \quad x \in \mathbb{R}$

Betragsungleichungen

- 1) Geben Sie die Lösungsmenge folgender Ungleichung an: $|x^2 - x - 6| \geq 5$
- 2) Geben Sie die Lösungsmenge folgender Ungleichung an: $|x - 4| + |x| \leq 5$

Taylorentwicklung

- 1) Berechnen Sie näherungsweise $\ln(2)$, indem Sie dafür das Taylorpolynom 4. Grades für $f(x) = x \cdot \ln(x)$ am Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ verwenden. Bestimmen Sie die Genauigkeit mit der Restgliedabschätzung von Lagrange. Überlegen Sie, an welcher Stelle Sie das Taylorpolynom berechnen.
- 2) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 3. Grades am Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ für $f(x) = e^{\sin(x)}$. Bestimmen Sie die Genauigkeit an der Stelle $x=0,1$ mit der Restgliedabschätzung von Lagrange.
- 3) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Grades am Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ für $f(x) = 1 + \sin(x^2)$. Bestimmen Sie die Genauigkeit an der Stelle $x=0,5$ mit der Restgliedabschätzung von Lagrange.

Extremwerte

- 1) Die Fläche eines Leichtathletikstadions setzt sich bekanntlich aus einem Rechteck (Fußballfeld) und zwei an den kürzeren Rechteckseiten angesetzten Halbkreisen zusammen. Wenn eine Stadionrunde 400 m beträgt, wie sind dann die Abmessungen für den Fußballplatz zu wählen, damit die Fläche des Fußballfeldes maximal wird? (mit Skizze arbeiten)
- 2) Gegeben sei die Funktion $f(x) = -ax^2 + b \quad a, b > 0$. Gesucht ist ein Rechteck, dessen linke untere Ecke im Nullpunkt des Koordinatensystems liegt und dessen rechte obere Ecke auf dem Graphen der gegebenen Funktion liegt. Bestimmen Sie die Koordinaten der rechten oberen Ecke so, dass die Rechtecksfläche maximal wird. (mit Skizze arbeiten)

Rechnen mit Matrizen

1) A sei eine $m \times n$ -Matrix, B eine $n \times r$ -Matrix (m, n, r natürliche Zahlen)

Für welche m, n, r ist das Ergebnis der Multiplikation AB ein Skalar, für welche ein Zeilenvektor, für welche ein Spaltenvektor und für welche eine Matrix mit einer Zeilenzahl und Spaltenzahl größer als 1?

2) Es seien $A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$

Berechnen Sie AB und BA . Für welche Winkel sind die Produkte gleich?

3) Es seien $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix}$

Prüfen Sie anhand dieser Matrizen das Distributivgesetz $A(B+C) = AB + AC$ für die Matrizenmultiplikation nach. Berechnen Sie dazu beide Seiten getrennt und vergleichen Sie die Resultate.

4) Sind folgende Matrizen zueinander invers?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

5) Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 9 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Lineare Gleichungssysteme aufstellen und lösen

1) Der Graph einer ganzrationalen Funktion 4. Grades ist bezüglich der y -Achse symmetrisch. Er geht durch den Punkt $A(4; -3)$ und hat in $B(2; 0)$ einen Wendepunkt. Berechnen Sie unter Verwendung des Gauß'schen LA die Gleichung dieser ganzrationalen Funktion.

2) Der Graph einer ganzrationalen Funktion 5. Grades ist symmetrisch zum Ursprung, hat in $P(-1; 1)$ einen Wendepunkt mit Steigung 3. Berechnen Sie unter Verwendung des Gauß'schen LA die Gleichung dieser ganzrationalen Funktion.