Matrizen und Matrizenoperationen in der Anwendung

Prof. Dr. Wolfgang Konen

TH Köln

Technology
Arts Sciences
TH Köln

Matrizen / Überblick

- Ziele dieses Kapitels
  - Wieso Matrizen
  - Definition Matrix, Matrixmultiplikation
  - Anwendung Produktionsplanung
  - Basiswechsel

Motivation Matrizen

- Beispiel Produktionsplanung
  - Aus k=1,...,3 Rohstoffen R_k werden Endprodukte E_n hergestellt. Die benötigten Rohstoffeinheiten je Einheit E_n sind:

$$
\begin{aligned}
0.4R_2 + 0.7R_3 &= E_1 \\
0.1R_1 + 0.25R_2 + 1.2R_3 &= E_2
\end{aligned}
$$

  - Wenn die Rohstoffpreise p_k je Einheit R_k sind, was sind dann die Kosten q_n je Einheit E_n ?

$$
\begin{aligned}
0.4p_2 + 0.7p_3 &= q_1 \\
0.1p_1 + 0.25p_2 + 1.2p_3 &= q_2
\end{aligned}
$$

  - **LGS**: Lineares Gleichungssystem

Motivation Matrizen

- Mathematiker sind (schreib-) faule Leute
  - Statt

$$\begin{aligned} 0.4\,p_2 + 0.7\,p_3 &= q_1 \\ 0.1\,p_1 + 0.25\,p_2 + 1.2\,p_3 &= q_2 \end{aligned}$$

  - schreiben sie einfacher

$$\begin{pmatrix} 0.0 & 0.4 & 0.7 \\ 0.1 & 0.25 & 1.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

Matrix

- Definition

Unter einer **(m x n)-Matrix** (Matrix vom Typ(m,n)) verstehen wir eine rechteckige Zahlenanordnung

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Zeile **z**uerst, **Sp**alte **sp**äter !

oder kürzer

$$\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right) \qquad i = 1, \ldots, m; \qquad j = 1, \ldots, n$$

Sonderfälle

- Spalten- und Zeilenmatrix

Eine (m x 1)-Matrix heißt Spaltenmatrix (**Vektor**)

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

nur **ein** Index !

Eine (1 x n)-Matrix heißt Zeilenmatrix (**Zeilenvektor**)

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \end{pmatrix}$$

Multiplikation von Matrizen

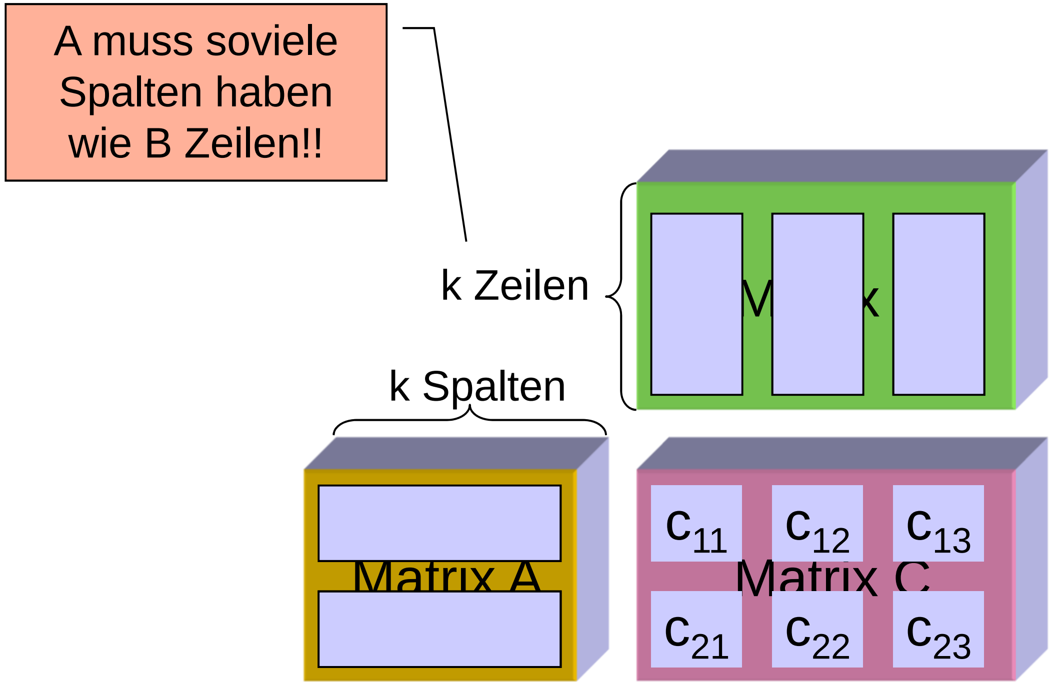
- Definition

Es sei A eine (n x k)-Matrix und B eine (k x p)-Matrix. Unter dem **Produkt** C=A·B verstehen wir die (n x p)-Matrix mit

$$c_{ij} = (\text{i - te Zeile von A}) \cdot (\text{j - te Spalte von B})$$
$$= \sum_k a_{ik} b_{kj}$$

heißt auch **inneres** Produkt, weil über die inneren Indizes summiert wird

Rechenschema A·B = C



Auch hier gilt: Zeile zuerst (in A), Spalte später (in B)

Anwendung Produktionsplanung

- Die Definition Matrixmultiplikation ist genau so gewählt, dass sich wieder das LGS ergibt:

$$\begin{pmatrix} 0.0 & 0.4 & 0.7 \\ 0.1 & 0.25 & 1.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

  - bedeutet ausmultipliziert

$$\begin{aligned} 0.4 p_2 + 0.7 p_3 &= q_1 \\ 0.1 p_1 + 0.25 p_2 + 1.2 p_3 &= q_2 \end{aligned}$$

Die Vorteile

1. Quartalspreise:

$$\begin{pmatrix} 0.0 & 0.4 & 0.7 \\ 0.1 & 0.25 & 1.2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{Q1} & \text{Q2} & \text{Q3} & \text{Q4} \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \end{pmatrix}$$

- Gelten in jedem Quartal andere Rohstoffpreise, so haben wir eine kompakte Darstellung und Berechnungsform der Endpreise.

Die Vorteile

2. Wertstoffketten, Zwischenprodukte, „Basiswechsel“:

- Rohstoffe $R_k \to$ Zwischenprodukte $Z_m \to$ Endprodukte E_n

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \quad \underbrace{\begin{array}{c} \begin{matrix} R_1 & R_2 & R_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \end{array}}_{\text{Matrix } \mathbf{A}} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \quad \underbrace{\begin{array}{c} \begin{matrix} Z_1 & Z_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \end{array}}_{\text{Matrix } \mathbf{B}}$$

- Gegeben die Rohstoffpreise **p**, wieviel kostet eine Einheit jedes Endproduktes?

Wertstoffketten (2)

- kompakte Matrixschreibweise (Endpreise **e**):

$$\mathbf{e} = \underbrace{\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}}_{\equiv \mathbf{C}} \cdot \mathbf{p}$$

- bedeutet ausgeschrieben:

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

z.B. $\mathbf{c_{11}} = \mathbf{b_{11} a_{11} + b_{12} a_{21}}$

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

Matrix **C** vermittelt direkt zwischen Rohstoffpreisen und Endpreisen!

Wertstoffketten (3)

Dieses Beispiel zeigt, daß folgendes gilt:

- Die Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix bildet einen Vektor (hier: **p**) auf einen neuen Vektor (hier: **e**)ab.
- Die Hintereinanderausführung zweier solcher Abbildungen (hier erst die Multiplikation mit der Matrix **A**, anschließend die Multiplikation mit **B**) entspricht gerade der Multiplikation mit der Matrix **C** = **BA**. Das Matrizenprodukt wird gerade so definiert, daß es diese Eigenschaft hat.

Zusammenfassung

- Matrizen: kompakte Darstellung von LGS
- Vektor als Spezialfall einer Matrix
- Matrixmultiplikation
- Matrizen vermitteln Wechsel zwischen Koordinatensystemen (Wertstoffketten, „Basiswechsel")