Orga

- Prak-Einf verpasst → ma-praktikum@gm.fh-koeln.de
  → Sprechstunde Beate Breiderhoff
- Übungen: Teilnahme nicht Pflicht
  aber SEHR wichtig für Klausur
- Ü Di 1.11. Feiertag → verlegt auf 2.11., 13^{00}, R 3.107
- Forum

Tutorium Fr, 16-18, R3.110, Start 21.10.

Indirekter Beweis f. Schubfachprinzip

Wenn $\underbrace{\text{n+1 Objekte in n Schubfächern}}_{A}$, dann $\underbrace{\text{mind 1 S.F. mit 2 Obj.}}_{B}$

Beweis: Annahme: Es gelte $\overline{B}$: ∀ S.F. gilt: höchstens 1 Objekt

$$\underbrace{\begin{array}{cccc} \boxed{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}} & \ldots & \boxed{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}} \\ \text{1. SF} & & & \text{n. SF}\end{array}}$$

$$\sum_{S.F.} \text{Objekte} \le n \quad \Rightarrow \overline{A} \quad (\text{Widerspruch zu } A)$$

Also $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ gezeigt $\Leftrightarrow$ $A \Rightarrow B$, q.e.d.

Zahlsysteme

Jede rationale Zahl lässt sich als periodischer Dezimalzahl und umgekehrt

$0.\overline{3} = 0.3333\ldots = \frac{1}{3}$

$1.23\overline{0} = 1.23 = \frac{123}{100}$

$x = 1.32\overline{438} =$

$100000x = 132438.\overline{438}$

$100x = 132.\overline{438}$ | −

$99900x = 132306.0$

$\Rightarrow x = \frac{132306}{99900}$

ii) Schreibweise Zahlmengen und Intervalle

Intervall	Menge	Beschreibung
$(c,-5)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid c < x < -5\}$	offenes Int. aller reellen Z. zw c u. −5
$[-10,-8]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid -10 < x \leq -8\}$	halboffenes " " " " zw. −10 u. −8
$(0, 5)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 5\}$	offenes Intervall aller $x \in \mathbb{R}$ zw. 0 und 5
$(0,+\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$	alle positiven reellen Zahlen

runde Klammer, weil $+\infty$ keine Zahl

alternativ: $\{x \in \mathbb{R}^+\} = \mathbb{R}^+$

alternativ:

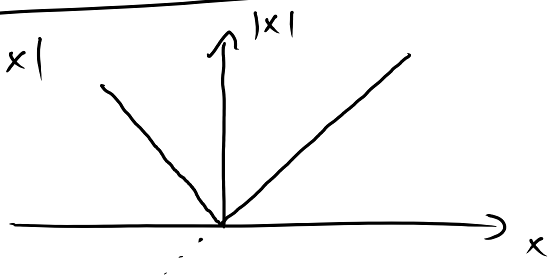
$\lim_{a \to \infty} (0, a)$

$]0,2[= (0,2) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$

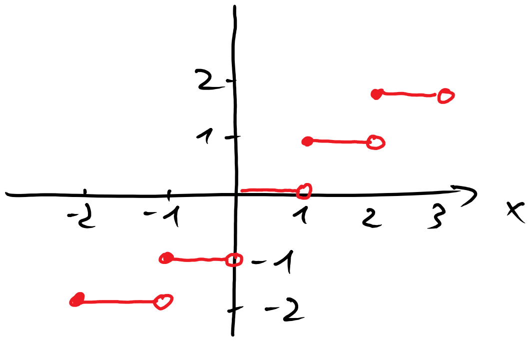
$[0,2] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\}$

Spez. Funktionen

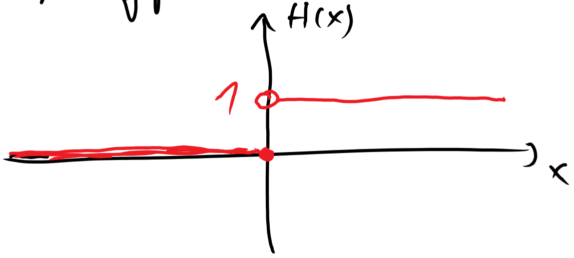
(1) $|x|$



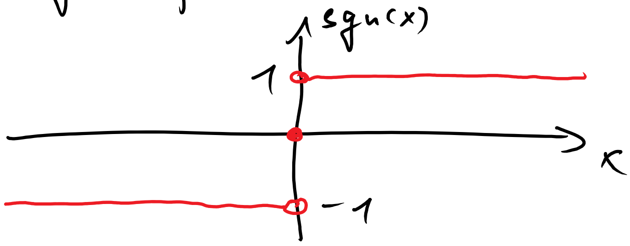
(2) Gauss-Klammer $\lfloor x \rfloor$
= floor(x)



(3) Sprungfunktion



(4) Signumfunktion



a) $x^2 - 25 = 0$ "3. Binomi" $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$\Leftrightarrow x^2 - 5^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-5)(x+5) = 0 \xrightarrow[\text{regel}]{\text{Faktor}} L = \{5, -5\}$

b) $\underline{x}\,\underline{\ln(x^2+1)} + \underline{x^2}\,\underline{\ln(x^2+1)} = 0$

$\Leftrightarrow \underset{a}{x} \cdot \underbrace{\ln(x^2+1)}_{b} \cdot \underbrace{(1+x)}_{c} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\vee \ln(x^2+1) = 0$ (*)

$\vee (1+x) = 0$

zu $\ln(x^2+1) = 0 \quad | e^{()}$

$(x^2+1) = e^0 = 1$

$x^2 = 0$

$x = 0$

$\Longrightarrow L = \{0, -1\}$ ✓ (passt in Def. bereich)

c) $x \ln(x) + x^2 \ln(x^2) = 0$ | Regel Nr. 4

$\underline{x}\,\underline{\ln x} + \underline{x^2} \cdot \underline{2 \ln x} = 0$

$x \cdot \ln x \cdot (1 + 2x) = 0$

Def. bereich der Gl. ist wg ln $D = \mathbb{R}^+$

$\Rightarrow L = \{0, 1, -\frac{1}{2}\}$ sind Kandidaten

0: ↯, 1: ✓, $-\frac{1}{2}$: ↯

ln(x) erlaubt keine nicht-pos. Werte

wg. Def $\Rightarrow$ $L = \{1\}$

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \overset{\text{nur f. } k>0}{=} \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot\cancel{(n-k)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}}{k!\;\cancel{(n-k)(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}}$$

$$= \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 1} \qquad \frac{k \text{ Terme}}{k \text{ Terme}}$$

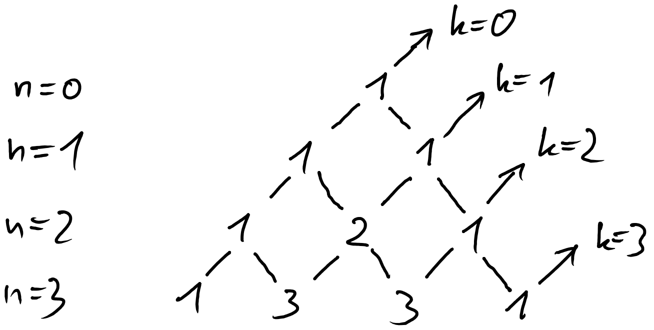
$$\binom{100}{2} = \frac{100!}{\underbrace{2!\;\;98!}_{\text{sehr große Zahlen}}} = \frac{100\cdot 99}{2\cdot 1}$$

$$\binom{100}{98} = \frac{100!}{98!\;2!} = \frac{100!}{2!\;98!} = \binom{100}{2} = \frac{100\cdot 99}{2\cdot 1}$$

Additionstheorem

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

dient dazu das Pascal'sche Dreieck (enthält $\binom{n}{k}$ bis zu einem best. n)



n \ k	0	1	2	3	Σ
0	1	–	–	–	1
1	1	1	–	–	2
2	1	2	1		4
3	1	3	3	1	$8 = 2^3$
					2^4
					2^5

Folgerung Binomischer Satz:

$a = 1,\ b = 1$

$$\underline{\underline{(1+1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\cdot 1\cdot 1}}$$

Pascal-Dreieck für $n = 7$

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

$$(a+b)^7 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$= 1\cdot b^7 + 7ab^6 + 21a^2b^5 + 35a^3b^4 + 35a^4b^3 + 21a^5b^2 + 7a^6b + 1\cdot a^7$$

$$\left.\begin{aligned} 4! &= 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \\ 3! &= 3\cdot 2\cdot 1 \\ 4\cdot 3! &= 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \end{aligned}\right\} =$$

Ü "Vereinfache"

(a) $$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)n\cdot\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = (n+1)n$$

(b) $$\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} = \frac{1}{n(n-1)!} + \frac{n\cdot 1}{n\cdot(n-1)!} = \frac{1+n}{n(n-1)!} = \frac{1+n}{n!}$$