__Orga__ __Ü__ 1.11. Feiertag ⇒ Ü WK wird verlegt
auf Mi, 2.11., 13^{00} Uhr R 3.107?

__Prak:__ im ~~L~~aufe des heutigen Tages
Termine im P-Tool für jeden bereitgestellt

Rätsel

$$\left(X - \frac{7}{2}\right)^2 = \left(Y - \frac{7}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|X - \frac{7}{2}\right| = \left|Y - \frac{7}{2}\right|$$

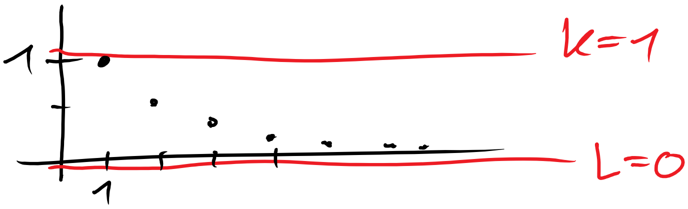
$$\Leftrightarrow \quad X - \frac{7}{2} = +\left(Y - \frac{7}{2}\right) \quad \vee \quad \left(X - \frac{7}{2}\right) = -\left(Y - \frac{7}{2}\right)$$

...

Zahlenfolgen

Bsp $n \in \mathbb{N}$

a) $a_n = \frac{1}{n} \in \mathbb{R}$



$(a_n) = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$

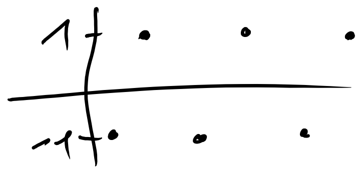
streng monoton fallend

n.o.b $K=1$

n.u.b. $L=0$

$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

b) $a_n = (-1)^n$ (alternierende Folge)



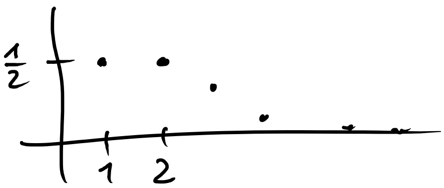
keine Monotonie

$(a_n) = -1, +1, -1, +1$

beschränkt, z.B. $K=1$, $L=-1$

c) $a_n = \frac{n}{2^n}$

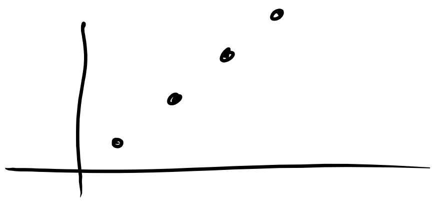
$(a_n) = \frac{1}{2}, \underset{\underset{\frac{1}{2}}{\parallel}}{\frac{2}{4}}, \frac{3}{8}, \frac{4}{16}, \ldots$



monoton fallend

beschränkt, z.B: $K=1$, $L=0$

d) $a_n = n$



$(a_n) = 1, 2, 3, \ldots$

streng monoton wachsend

n.u.b., z.B $= L=0$

nicht n.o.b.

$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$

Bsp zu Grenzwert

a) $a_n = \frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ "Nullfolge"

$\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Bew aus Def

$|a_n - 0| < \varepsilon$

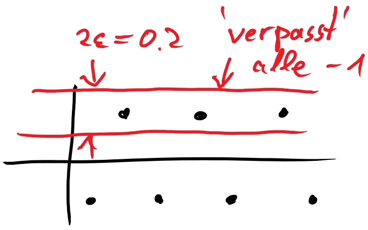
$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \qquad (n, \varepsilon > 0)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$

$\Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$ liegt im Band

$n_0 = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$ funktioniert

b) $a_n = (-1)^n$



$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ex. nicht

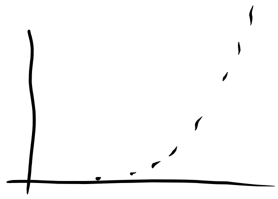
divergent

c) $a_n = \frac{2n-1}{3n} \Rightarrow (a_n) = \frac{1}{3}, \frac{3}{6}, \frac{5}{9}, \ldots$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n} \underset{\uparrow}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}(2-\frac{1}{n})}{\cancel{n}\cdot 3} = \frac{2-0}{3} = \frac{2}{3}$ Nullfolge

g.P.i.N.

d) $a_n = n^2 + 5 \Rightarrow (a_n) = 6, 9, 13, \ldots$



divergent

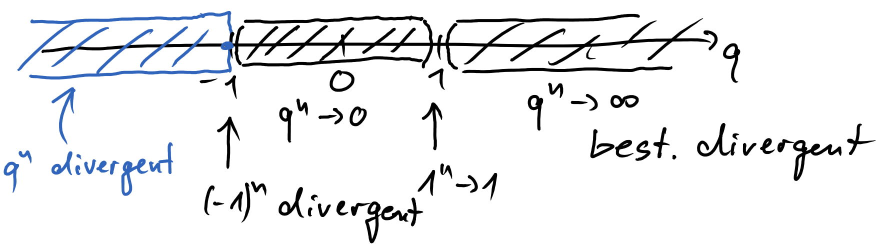
$\lim\limits_{n\to\infty} (n^2+5) = +\infty$ bestimmt-divergent (uneig. GW ist $+\infty$)

e) $a_n = (-1)^n n^2 \Rightarrow (a_n) = -1, 4, -9, 16, \ldots$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ex. nicht

divergent, kein uneig. GW

f) Geometrische Folge q^n, $q \in \mathbb{R}$



Zins 1%, Kapital K

1. Jahr $K \cdot 1.01$

2. Jahr $K \cdot (1.01)^2$

$\vdots$

n. Jahr $K\,(\underbrace{1.01}_{q>1})^n$

$\downarrow$

$+\infty$

q^n ist Nullfolge für $q \in \,]-1,1[$

Warum "$0 \cdot \infty$" nicht geht

1) $\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{1}{n}} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ \infty}}{n^2} = n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$ (für $n \to \infty$)

2) $\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{1}{n^2}} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ \infty}}{n^2} = 1 \to 1$

3) $\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{1}{n^4}} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ \infty}}{n^2} = \frac{1}{n^2} \to 0$

"$\infty - \infty$"

$a_n = n \xrightarrow{n \to \infty} \infty$

$b_n = 2n \to \infty$

1) $a_n - b_n = n - 2n = -n \xrightarrow[n \to \infty]{} -\infty$

2) $b_n - a_n = 2n - n = n \to +\infty$

$c_n = n + 3 \to \infty$

3) $a_n - c_n = n - (n+3) = -3$

Bsp zum Rechnen mit GW

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \right) = \left(\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} \right) \cdot \left(\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} \right) = 0 \cdot 0 = 0$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{3n^3}{5n^3} \right) = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} 3n^3}{\lim\limits_{n \to \infty} 5n^3} = \frac{\infty}{\infty} =$ unentscheidbar

$\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{3\cancel{n^3}}{5\cancel{n^3}} \right) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{3n}{5n^4} \right) = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{3}{5n^3} \right) = \frac{3}{\infty} = \underline{\underline{0}}$

g.P.i.N. : größte Potenz im Nenner

d) $$\lim_{n\to\infty} \frac{-2n^2+4n-5}{8n^2-3n+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(-2+\frac{4}{n}-\frac{5}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(8-\frac{3}{n}+\frac{7}{n^2}\right)} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$$

g.P.i.N

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-2n^2}{8n^3+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^3}\left(-\frac{2}{n}\right)}{\cancel{n^3}\left(8+\frac{7}{n^3}\right)} = \frac{0}{8} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-2n^3}{8n^2+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(-2n)}{n^2\left(8+\frac{7}{n^2}\right)} = -\frac{1}{4}n \to -\infty$$

e) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\right) = 0 - 0 = 0$$

f) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n}-\frac{n^2}{n+1}\right) = (\infty - \infty)$$ also unentscheidbar

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \underbrace{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)}_{\to 0} \overset{e)}{=} \infty \cdot 0$$ " "

auf Hauptnenner (HN) bringen

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2(n+1)-n^2 n}{n(n+1)}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^3}+n^2-\cancel{n^3}}{n^2+n} \underset{\text{g.P.i.N.}}{=} \frac{1}{1} = 1$$

Übung

2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n^2-1}{3n^2+2}\right)^2$ 3) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{(n+1)}-\frac{n^3}{(n-1)}\right)$

4) $\lim_{k\to\infty}\frac{75\cdot 10^k+6\cdot 10^{2k}}{0.4\cdot 10^{k-3}-20\cdot 10^{2k-2}}$

Lsg 2) $\left(\lim_{n\to\infty}\frac{7n^2-1}{3n^2+2}\right)^2=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}(7-\frac{1}{n})}{\cancel{n^2}(3+\frac{2}{n})}\right)^2=\left(\frac{7}{3}\right)^2=\underline{\underline{\frac{49}{9}}}$

3) auf HN bringen

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(n-1)-n^3(n+1)}{(n+1)(n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^4}-n^3-(\cancel{n^4}+n^3)}{n^2-1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n^3}{n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}(-2n)}{\cancel{n^2}(1-\frac{1}{n^2})}=\underline{\underline{-\infty}}$

g.P.i.N

4) $\lim_{k\to\infty}\frac{75\cdot 10^k+6\cdot 10^{2k}}{0.4\cdot 10^{k-3}-20\cdot 10^{2k}\cdot 10^{-2}}=$ (10^{2k} ausklammern, "$-2k$ im Exponenten)

$\boxed{\begin{array}{l}10^{a+b}=10^a\cdot 10^b\\ \hline 10^a\cdot 10^{-2k}\\ 10^{a-2k}\end{array}}$

$=\lim_{k\to\infty}\frac{\cancel{10^{2k}}(75\cdot 10^{k-2k}+6\cdot 10^{2k-2k})}{\cancel{10^{2k}}(0.4\cdot 10^{k-3-2k}-20\cdot 0.01\cdot 10^{2k-2k})}$

$=\lim_{k\to\infty}\frac{75\cdot \cancel{10^{-k}}+6}{0.4\cdot \cancel{10^{-k-3}}-0.2}$ ($10^{-k}\to 0$, $10^{-k-3}\to 0$)

$\left(10^{-k}=\frac{1}{10^k}\right.$
$=\left(\frac{1}{10}\right)^k$
$=q^k$ mit $q=0.1$

$=\frac{6}{-0.2}=\underline{\underline{-30}}$

Fixpunkt-Iteration

Mittwoch, 26. Oktober 2022 11:23

Bsp. $x + 1 = \sin(x) \quad | -1$ (transzendente Gl.)

$$x = \underbrace{\sin(x) - 1}_{f(x)}$$

$$a_{n+1} \qquad a_n$$

$$\arcsin(x+1) = x$$

n	a_n	a_{n+1}
1	1	$\sin(1) - 1 = a_2$
2	a_2	$\sin(a_2) - 1 = a_3$
3	a_3	...
...	...	...

Landau: $a_n = 2n^3 - n^2$ ist $O(n^3)$

weil $\dfrac{2n^3 - n^2}{n^3} = 2 - \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 2$