

V 2.11.2022

Mittwoch, 2. November 2022 08:53

Orga Ü WK heute 13⁰⁰ : 3.107
 Ü PW " " : 3.101

Landau'sche O-Notation

$$\boxed{O(1) < O(\log n) < O(n) < O(n \log n) < O(n^2) < O(n^2 \log n) < \dots < O(2^n)}$$

- (Ü)
- 2) $7n^5 + 26n^6 \in O(n^6)$, weil $\frac{7n^5 + 26n^6}{n^6} = \frac{7}{n} + 26 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 26 \checkmark$
- 3) $n + 3n^2 - 2n \log(n) \in O(n^2)$, weil $\frac{n + 3n^2 - 2n \log(n)}{n^2} = \frac{1}{n} + 3 - 2 \underbrace{\frac{\log n}{n}}_{\rightarrow 0} \rightarrow 3 \checkmark$
- 4) $\frac{n^4 + n^2}{n+5} \stackrel{\text{g.P.i.N.}}{=} \frac{n(n^3+n)}{n(1+\frac{5}{n})} = \frac{\overbrace{n^3+n}^{a_n}}{1+\underbrace{0}_{b_n}} \in O(n^3)$
 weil $\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^3+n}{(1+\frac{5}{n})n^3} = \frac{1+\frac{1}{n^2}}{(1+\frac{5}{n})} \rightarrow 1$
 weil $O(\log n) < O(n)$
- 5) $\frac{n^4 + n^2}{n+5} - n^3 \stackrel{\text{H.N.}}{=} \frac{n^4 + n^2 - n^3(n+5)}{n+5} = \frac{\cancel{n^4} + n^2 - \cancel{n^4} - 5n^3}{n+5}$
 $\stackrel{\text{g.P.i.N.}}{=} \frac{n - 5n^2}{1 + \frac{5}{n}} \in O(n^2)$

Modulare Arithmetik

"Kürzen" ist in der mod-Welt nicht erlaubt

Bsp $2 \cdot 4 = 5 \cdot 4 \pmod{6}$
 $8 = 20 \pmod{6} \checkmark$

²
 Kürze
 4

$2 = 5 \pmod{6}$

Bsp. 2 $8 + p = 2 \pmod{11}$
 $11 + p = 5 \pmod{11}$
 $p = 5 \pmod{11}$

$1 + 3$

Schreibweisen:

Was ist der Rest v. 26 / 6

$26 \pmod{6} = 2$

$a = b \pmod{6}$

a und b sind mod 6 gleich

Bsp. Prüfziffer p in 3-446-19873-p ISBN bestimmen:

Lsg. $10 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 8 \cdot 4 + 7 \cdot 6 + 6 \cdot 1 + 5 \cdot 9 + 4 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 3 + p = 0 \pmod{11}$

$\Leftrightarrow 250 + p = 0 \pmod{11}$

$\Leftrightarrow 8 + p = 0 \pmod{11} \quad | + 3$

$\Leftrightarrow 11 + p = 3 \pmod{11}$

$\Leftrightarrow \underline{p = 3}$
 ist die Prüfziffer

$\Rightarrow \underline{3-446-19873-3}$

Was ist 250 / 11 der Rest

1) $250 - 220 = 30$
 $30 - 22 = 8$

2) mit TR: $250 / 11$

$250 \div 11 = 22 \overline{.72}$

$- 22 \cdot$

$0.72 \cdot 11 = \underline{\underline{8}}$

ü Modulare Arithmetik

a) 3-446-91873-3 ist keine gültige ISBN

$$\text{Lsg.: } 10 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 8 \cdot 4 + 7 \cdot 6 + 6 \cdot 9 + 5 \cdot 1 + 4 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 3 + 3 = 0 \pmod{11}$$

$$\Leftrightarrow 261 = 0 \pmod{11}$$

$$\Leftrightarrow 8 = 0 \pmod{11} \quad \text{↯} \Rightarrow \text{keine gültige ISBN}$$

b) Wann ist x-446-91873-3 scheinbar gültig?

$$\text{Lsg.: } 10 \cdot x + (261 - 10 \cdot 3) = 0 \pmod{11}$$

$$\Leftrightarrow 10x + 231 = 0 \pmod{11}$$

$$\Leftrightarrow 10x = 0 \pmod{11}$$

$\Rightarrow$ nur für $x=0$ scheinbar gültige ISBN, alle anderen x werden als fehlerhaft erkannt

Tabelle

x	$10x$	$\pmod{11}$	
0	0	0	✓
1	10	10	↯
2	20	9	↯
3	30	8	↯
⋮	⋮	⋮	⋮
9	90	2	↯

Reelle Funktionen : Grenzwerte

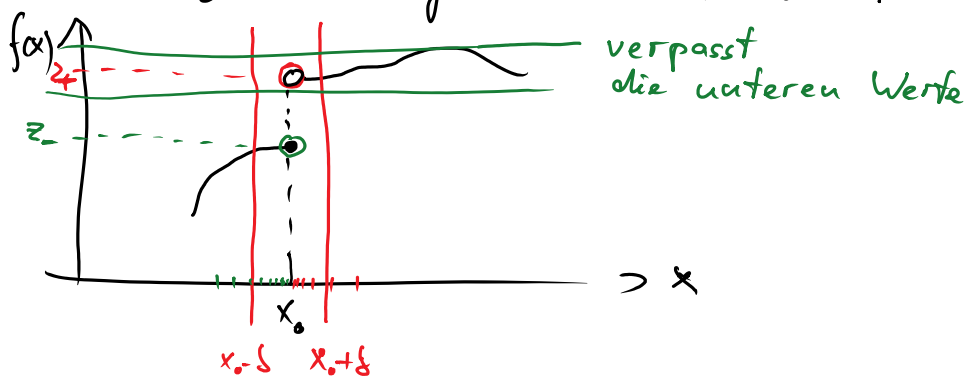
$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad \text{bei } x=0 \text{ nicht definiert}$$

x	± 1.0	± 0.2	± 0.1	± 0.01
$\frac{\sin(x)}{x}$	0.841	0.993	0.998	0.99998

$$\Rightarrow \text{Vermutungen} \quad \frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ geeignet definieren

ε - δ -Schlauch ist geeignet um zu sehen, daß eine bei x_0 unstetige Funktion dort keinen Grenzwert



Beispiele zu Grenzwert

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Bew. Annäherung aus Kap 5.4 (Taylorreihe) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \dots}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{3!} + \dots}{1} \underset{\substack{\uparrow \\ x=0 \text{ einsetzen}}}{=} \underline{\underline{1}}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & , x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \\ -\frac{1}{x} & , x < 0 \end{cases}$$

Einige der interessierenden Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty, \text{ denn für "linksseitiges" } x_n = -\frac{1}{n} < 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0^-$$

$$\text{gilt: } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{-\frac{1}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2, \text{ denn } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = \underline{\underline{2}}$$

↖ lineare Funktion

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \text{ denn für "rechtsseitiges" } (x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0^+ \text{ gilt}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2-1}{x_n-1} = \frac{0^2-1}{0-1} = \underline{\underline{1}}$$

