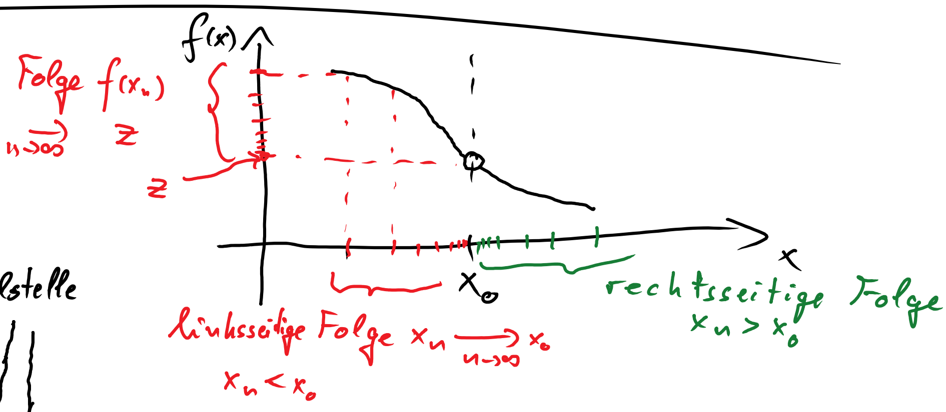
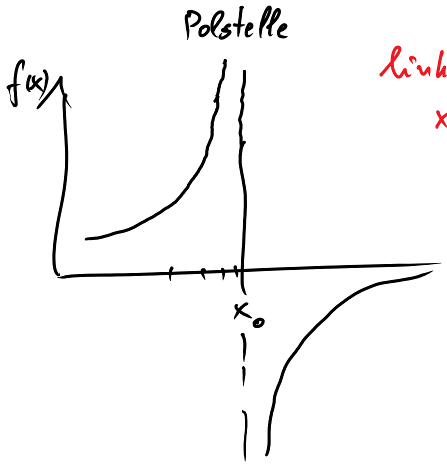
Orga Profil²-Woche 21.–25.11.22
→ keine Mathe-V, Ü
Ab Wo 28.11. Frau Ahe Schmitter

Wdh:

Grenzwert
von $f(x)$ bei x_0

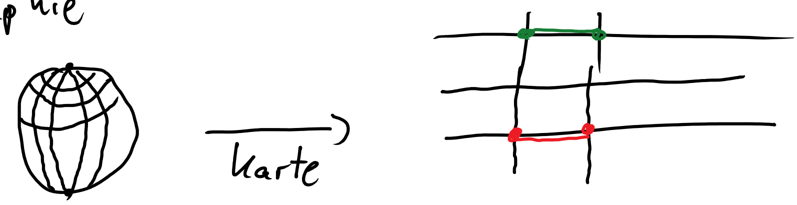


Polstelle



Woher der Begriff "Pol = ∞"?

Kartographie



nahe Nordpol — real ≈ cm

Äquator ≈ 100 km

Um 1 km real am Nordpol auf Karte abzubilden, brauche ich ∞ viel Papier.

Ü Grenzwerte 1

a) $$\lim_{x\to 1}\left[(x+1)\cos(x-1)+\frac{\sin(x-1)}{x+1}\right] \overset{\text{1 einsetzen}}{=} 2\cos(0)+\frac{\sin(0)}{2} = \underline{\underline{2}}$$

b) $$\lim_{x\to 1}\left[\frac{x+2}{x-1}-\frac{x^2+2x+3}{\underbrace{x^2-1}_{(x-1)(x+1)}}\right]$$

Einsetzen "1" führt auf 0 im Nenner → geht nicht

Nr. 5

$$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{(x+2)\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x+1)}-\frac{(x^2+2x+3)}{(x-1)\,(x+1)}\right]$$

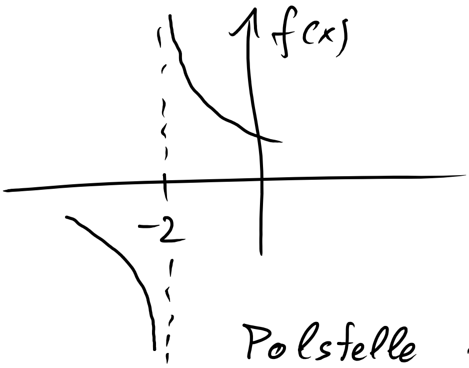
$$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{\cancel{x^2}+3x+2-\cancel{x^2}-2x-3}{(x-1)\,(x+1)}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}\,(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Weitere Bsp

a) $$\lim_{x\to(-2)-}\frac{x^2+2x+2}{x+2} = \frac{2}{0-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to(-2)+}\frac{x^2+2x+2}{x+2} = \frac{2}{0+} = +\infty$$



Polstelle bei $x_0=-2$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+4x+4}{x+2}$$ Einsetzen: $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x+2)}} = \lim_{x\to -2}(x+2) = \underline{\underline{0}}$$

Ü
a) $$\lim_{x\to 3+}\frac{x^2-3x+5}{x-3}$$
b) $\lim_{x\to 3-}$ "
c) $$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{x-3}$$

Ü Grenzwert 2

a) $$\lim_{x\to 3+}\frac{x^2-3x+5}{x-3} = \frac{5}{0+} = +\infty$$

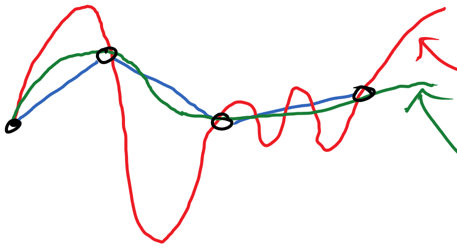
heißt: Folge die gegen 0 strebt aber immer >0 ist

b) $$\lim_{x\to 3-}\frac{x^2-3x+5}{x-3} = \frac{5}{0-} = -\infty$$

c) $$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)^{\cancel{2}}}{\cancel{x-3}} = \underline{\underline{0}}$$

Differentialrechnung

Motivation 'Splines':



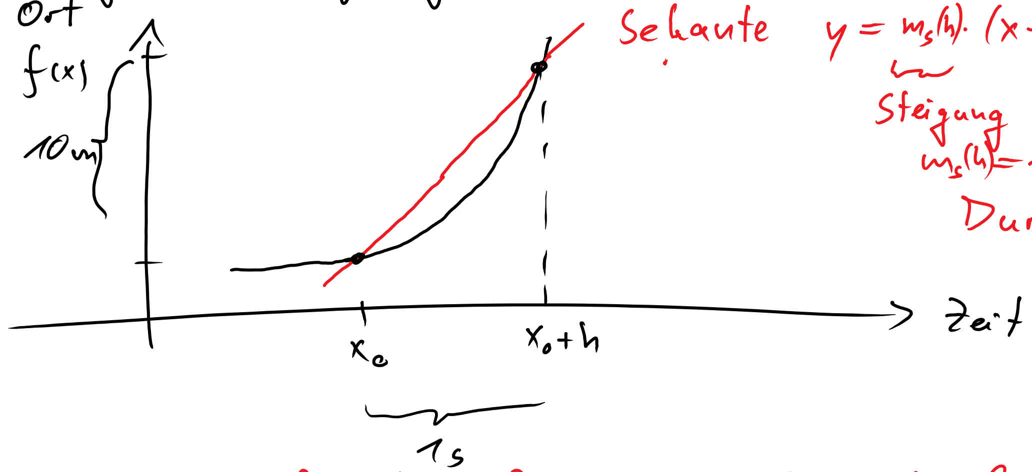
nicht schön: Knicke!

nicht schön: unnötig steil

schön: nicht zu steil
+ keine Knicke

→ Splines

Ableitung = Steigung von $f(x)$ in x_0



Sekante $y = \underbrace{m_s(h)}_{\text{Steigung der Sekante}} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

$m_s(h) = 10 \frac{m}{s}$ = Durchschnittsgeschw.

$$m_s(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{(x_0+h) - x_0} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Steigung Tangente $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

Bsp $f(x) = x^2$. Was ist $f'(x_0)$?

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x_0^2} + 2hx_0 + h^2 - \cancel{x_0^2}}{h}$$

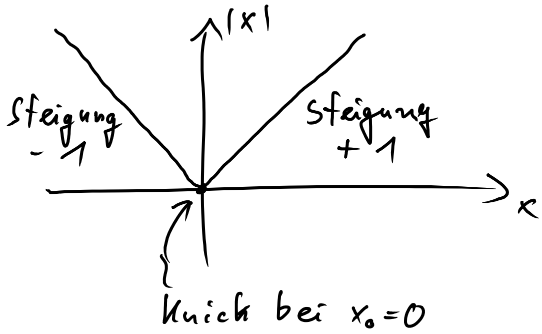
$$\lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2x_0 + h)}{\cancel{h}} = 2x_0$$

$\Rightarrow$ für $f(x) = x^2$ ist $f'(x) = 2x$

(o. Bew.) $f(x) = x^n$ ist $f'(x) = n x^{n-1}$

Bsp für nicht diff.bar:

$\boxed{f(x) = |x| \text{ ist in } x_0 = 0 \text{ nicht diff.bar}}$



$$\lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -1 = z^-$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +1 = z^+$$

Weil $z^- \neq z^+$ ex. Grenzwert bei 0 nicht.

Bsp Quotientenregel:

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

$u = x^2 \qquad u' = 2x$
$v = x+1 \qquad v' = 1$

$$f'(x) = \frac{vu' - uv'}{v^2} = \frac{(x+1)2x - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)^2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}}}$$

Bsp Kettenregel

1) $h(x) = g(f(x)) = (\sin x)^3$

$g(u) = u^3 \qquad g'(u) = 3u^2$
$f(x) = \sin(x) \qquad f'(x) = \cos(x)$

$$h'(x) = \underbrace{3u^2\Big|_{u=\sin x}}_{g'(u)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{f'(x)}$$

$$= \underline{\underline{3(\sin x)^2 \cdot \cos x}}$$

2) $h(x) = \left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2$

$g(u) = u^2 \qquad g'(u) = 2u$
$f(x) = \frac{x^2}{x+1} \qquad f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$

$$h'(x) = \underbrace{2\left(\frac{x^2}{x+1}\right)}_{g'(u)\big|_{u=f(x)}} \cdot \underbrace{\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}}_{f'(x)}$$

3) $h(x) = a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x$

$= e^{x \ln(a)}$

$g(u) = e^u \qquad g' = e^u$
$f(x) = x \ln a \qquad f' = \ln a$

3) $h(x) = a^{x} = (e^{\ln a})^{x}$
$= e^{x \ln(a)}$

$h'(x) = e^{x \ln a} \cdot \ln a$
$= a^x \cdot \ln a$

$g(u) = e^u \quad g' = e^u$
$f(x) = x \ln a \quad f' = \ln a$

Tipps zum Ableiten

$\frac{1}{x} = x^{-1} \longrightarrow$ Ableitung $-1\,x^{-2}$

$\left(\frac{1}{(x+1)^5}\right)' = \left((x+1)^{-5}\right)' = -5\,(x+1)^{-6} \cdot 1$

$(x+1)' \cdot$

Ü Differenzieren

a) $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$

$u = x^3 \quad u' = 3x^2$

$v = (x+1)^2 \quad v' = 2(x+1)\cdot 1$

$$f'(x) = \frac{(x+1)^{\cancel{2}} 3x^2 - 2\cancel{(x+1)}\cdot x^3}{(x+1)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{(x+1)\cdot 3x^2 - 2x^3}{(x+1)^3}$$

hier nicht kürzen!

$$= \frac{3x^3 + 3x^2 - 2x^3}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{x^3 + 3x^2}{(x+1)^3}$$

b) $h(x) = \sin(x^3)$

$g(u) = \sin(u) \quad g' = \cos u$

$f(x) = x^3 \quad f' = 3x^2$

$h'(x) = \cos(x^3)\cdot 3x^2$

c) $e^{\sin(x^2)} = h(x)$

$$h'(x) = \underbrace{e^{\sin(x^2)}}_{\text{nachdiff}} \cdot \cos\underbrace{(x^2)}_{\text{nach diff}} \cdot 2x$$