Orga

Profil^2-Woche 21.-25.11
$\Rightarrow$ keine Mathe V, Ü, P
Screencasts: L'Hospital
bei Bedarf weitere
Evaluation $\rightarrow$ per Mail online-Befragung
kommt später

Ableitung Betragsfunktion

$f(x) = |(x+1)^3|$ Was ist $f'(x)$?

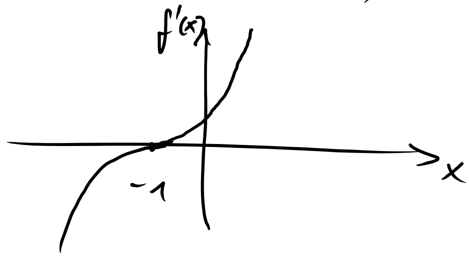
Fallunterscheidung

1. Fall: $(x+1)^3 > 0 \Leftrightarrow x > -1$:

$f(x) = (x+1)^3 \Rightarrow f'(x) = 3(x+1)^2$

2. Fall: $(x+1)^3 < 0 \Leftrightarrow x < -1$:

$f(x) = -(x+1)^3 \Rightarrow f'(x) = -3(x+1)^2$



Satz von Taylor

Nehmen wir an, wir kennen $f, f', f'', \dots, f^{(n)}$ an einer Stelle x_0 genau. Was können wir dann für $f(x_0 + \delta)$ sagen?

Beispiel:

Wie können wir $\ln(1.5)$ berechnen, wenn wir für $f(x) = \ln(x)$ nur die Ableitungen bei $x_0 = 1$ kennen

$\Rightarrow$ mit Satz von Taylor: Ordnung Polynom sei $n = 3$

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(1)$
0	$\ln(x)$	0
1	x^{-1}	1
2	$-x^{-2}$	-1
3	$+2x^{-3}$	$+2$
4	$-6x^{-4}$	

$$\Rightarrow P_3(x-1) = 0 + 1\,\frac{(x-1)}{1!} - 1\,\frac{(x-1)^2}{2!} + 2\,\frac{(x-1)^3}{3!}$$

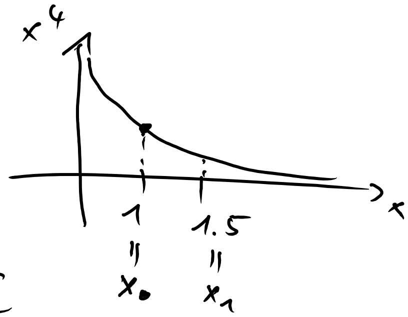
$$\Rightarrow \quad \ln(1.5) \approx P_3(1.5) = 0.41\overline{6}$$

Welcher Fehler steckt in der Abschätzung

Das geht über Restglied-Formel

1. Schritt: C bestimmen

$|f^{(4)}(x)| = |-6x^{-4}| = \frac{6}{x^4}$ ist monoton fallend $\Rightarrow$ Maximalwert ist am li Rand, also bei 1: $|f^{(4)}(1)| = 6 = C$



2. Schritt: in Restgliedformel einsetzen

$$|R(1.5)| \leq \frac{6}{(3+1)!}\,|1.5-1|^{3+1} = \frac{6}{24 \cdot 16} = 0.0156$$

<u>Probe</u> (nicht mehr Teil der Taylorberechnung)

Probe (nicht mehr Teil der Taylorberechnung)

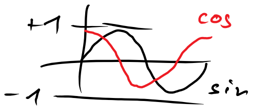
$$\Big|\ln(1.5) - \underbrace{0.41\overline{6}}_{P_3(1.5-1)}\Big| = 0.01120 < 0.0156 \quad \checkmark$$

Ü: Bestimme Taylorpoly f. $f(x) = \sin(x)$ bei $x_0 = 0$ zum Grade (zur Ordnung) 5. Wie genau ist Taylorpoly bei $x = 0.3$?

Ü $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$, $n = 5$,

Was ist $\sin(0.3)$ näherungsweise?

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(0)$
0	$\sin(x)$	0
1	$\cos(x)$	1
2	$-\sin(x)$	0
3	$-\cos(x)$	-1
4	$\sin(x)$	0
5	$\cos(x)$	1
6	$-\sin(x)$	//////



$$P_5(x-x_0) = \underbrace{f(0)}_{0} + \underbrace{\frac{f'(0)}{1!}}_{1}(\overset{0}{\overset{\|}{x-x_0}}) + \underbrace{\frac{f''(0)}{2!}}_{0}(x-\cancel{x_0})^2 + \ldots \frac{f^{(5)}(x_0)}{5!}(x-x_0)^5$$

$$= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5$$

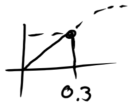
$$P_5(0.3) = 0.2955 \approx \sin(0.3)$$

Wie genau ist Abschätzung

1. Schritt: C ist obere Schranke für $|f^{(6)}(x)| = \sin(x)$ im Intervall $[0, 0.3]$

Zwei Alternativen: a) grobe Abschätzung $\sin(x) \in [-1, 1]$ $\Rightarrow C = 1$

b) genauere Absch.



$\Rightarrow$ aus Taylorpoly ≈ 0.2955

$C = 0.2955$

2. Schritt: $C = 1$ einsetzen

$$|R_5(x)| = \frac{C}{6!}|x-0|^6 = \frac{x^6}{6!}$$

$$|R_5(0.3)| = \frac{0.3^6}{6!} \approx 1 \cdot 10^{-6}$$

(Probe: $\sin(0.3) = 0.295520206$)

Eigenschaften diff.barer Funktionen

- Minimum, Maximum
- Wendestelle
- Steigung
- Monotonie
- Krümmungsverhalten (Steigung der Ableitung) (konvex, konkav)

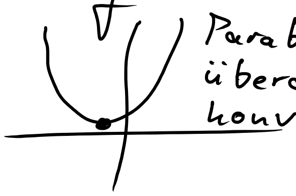
Bild zu konkav / konvex

konkav konvex

Linse

Merkspruch: "Ist der Bauch konkav
war die Anna brav
Ist er konvex, hatte Anna ...

Konvexität wichtig: In der Optimierung
konvexe Funktion:
lokales Minimum auch global



Parabel überall konvex

Beispiel Extrema

$f(x) = x^3 - 3x^2$

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \iff 3x(x-2) = 0$

$\iff x_1 = 0 \lor x_2 = 2$

sind Kandidaten f. Extrema

$f''(x) = 6x - 6$

$f''(x_1) = f''(0) = -6 < 0 \Rightarrow x_1 = 0$ ist Max.

$f''(x_2) = f''(2) = +6 > 0 \Rightarrow x_2 = 2$ ist Min.

Ü Nullstellen, Extrema, Wendepunkte + Wendetangente für $\boxed{f(x) = x(x-3)^2}$

Lösung: $f(x) = x(x-3)^2$ hat Nullstellen nach Faktorregel

$x_1 = 0 \quad x_2 = 3$

1. Ableitung über Produktregel

$u = x \quad u' = 1$
$v = (x-3)^2 \quad v' = 2(x-3)$

$f'(x) = (x-3)^2 + x \cdot 2(x-3)$
$= (x-3)[(x-3) + 2x]$
$= (x-3)(3x-3)$
$= 3(x-3)(x-1)$

$= 3x^2 - 12x + 9$

Nullstellen über Faktorregel
$x_1 = 3 \ , \ x_2 = 1$

$f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2)$

$f''(3) = 6 > 0 \Rightarrow \underline{x_1 = 3 \text{ Min.}}$

$f''(1) = -6 < 0 \Rightarrow \underline{x_2 = 1 \text{ Max}}$

Wendepunkt: $f''(x) = 6x - 12 = 0$
$= 6(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2$ ist Kand. WP

$f'''(x) = 6 \neq 0 \ \forall x \Rightarrow x = 2$ ist WP

$f'''(x) = 6 \neq 0 \;\; \forall x \quad \Longrightarrow \quad x = 2$ ist WP

Wendetangente

$$w(x) = f'(2)\,(x-2) + f(2)$$

$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = -3$$

$$f(2) = 2 \cdot (2-3)^2 = 2$$

$$w(x) = -3\,(x-2) + 2$$

$$= \underline{\underline{-3x + 8}}$$

Bild zu Wendepunkt