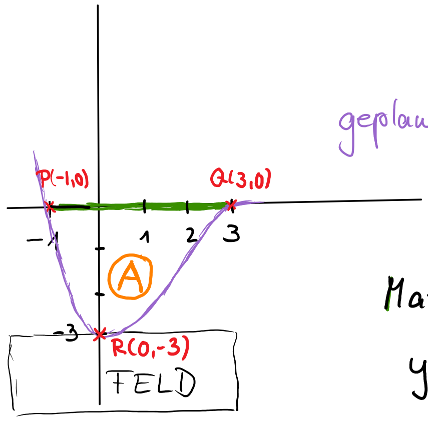
Vorlesung Mathematik 30.11.22

Lineare Algebra

Bp. zur Einführung Ziel: Gauß'scher Lösungsalgorithmus

geplante Umgehungsstraße



Mathematematische Formulierung

$$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$
$$y' = 4ax^3 + 3bx^2 + cx + d$$

Zu bestimmen: Koeffizienten a, b, c, d, e

Vorgehen: Punktproben:

$R(0,-3)$: $-3 = a\cdot 0^4 + b\cdot 0^3 + c\cdot 0^2 + d\cdot 0 + e$

$\Rightarrow e = -3$

$Q(3,0)$: $0 = a\cdot 3^4 + b\cdot 3^3 + c\cdot 3^2 + d\cdot 3 + e$

$0 = 81a + 27b + 9c + 3d + e$

$P(-1,0)$: $0 = a\cdot(-1)^4 + b(-1)^3 + c\cdot(-1)^2 + d(-1) + e$

$0 = a - b + c - d + e$

Steigung in $R(0,-3)$ ist 0: $0 = 4a\cdot 0^3 + 3b\cdot 0^2 + c0 + d$

$\Rightarrow d = 0$

Steigung in $Q(3,0)$ ist 0: $0 = 4a\cdot 3^3 + 3b\cdot 3^2 + c\cdot 3 + d$

$0 = 108a + 27b + 3c + d$

Auswerten:

$$\begin{aligned} a - b + c - d + e &= 0 \\ 81a + 27b + 9c + 3d + e &= 0 \\ e &= -3 \\ 108a + 27b + 6c + d &= 0 \\ d &= 0 \end{aligned}$$

5 Gleichungen mit 5 Unbekannten

mit $e = -3$ und $d = 0$ vereinfacht sich das GS:

$$\begin{aligned} a - b + c - 3 &= 0 \\ 81a + 27b + 9c - 3 &= 0 \\ 108a + 27b + 6c &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a - b + c &= 3 \\ 81a + 27b + 9c &= 3 \\ 108a + 27b + 6c &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a - b + c &= 3 \\ 81a + 27b + 9c &= 3 \\ 108a + 27b + 6c &= 0 \end{aligned} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 81 & 27 & 9 & 3 \\ 108 & 27 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

erweiterte Koeffizientenmatrix des GS

Was im Verlauf des Kapitels erarbeitet wird:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 81 & 27 & 9 \\ 108 & 27 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Koeffizienten-matrix   Variablen-vektor   Lösungs-vektor

Matrizenmultiplikation

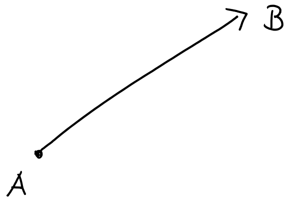
Ziel: Lineares GS lösen:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

n Unbekannte
m Gleichungen

Vektorrechnung

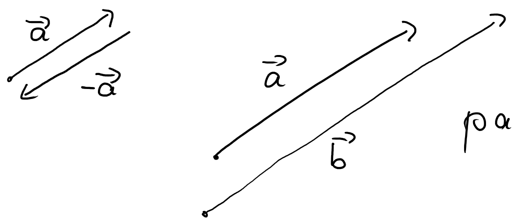
Was ist ein Vektor?



"freier Vektor"

$\overrightarrow{AB}$

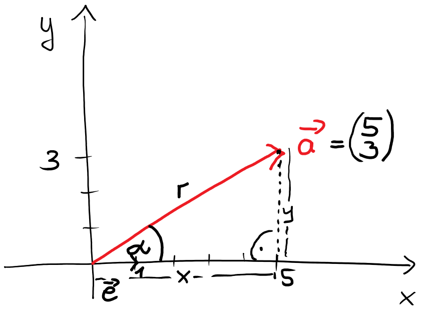
Def: (Vektor)
Unter einem Vektor versteht man eine Größe, die durch Angabe einer Maßzahl und einer Richtung vollständig beschrieben wird.



parallele Vektoren

Rechnen mit Vektoren: Notwendig ist ein Koordinatensystem

Kartesisches Koordinatensystem in $\mathbb{R}^2$



$\vec{a}$ wird beschrieben durch α und r

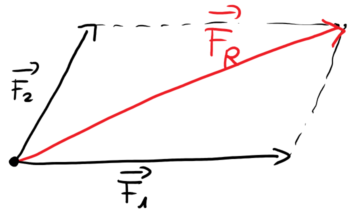
Es gilt: $x^2 + y^2 = r^2$ ($\Rightarrow$ r bestimmen)
(Pythagoras)
$\tan\alpha = \frac{y}{x}$

r ist die Länge des Vektors $\vec{a}$
$r = |\vec{a}|$

Weitere Begriffe: $\vec{0}$ Nullvektor Länge 0
$\vec{e}$ Einheitsvektor Länge 1

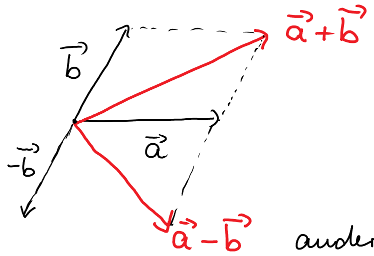
Vektoroperationen - Rechnen mit Vektoren

Bp.: aus der Physik



Kräfteparallelogramm

Vektoraddition:



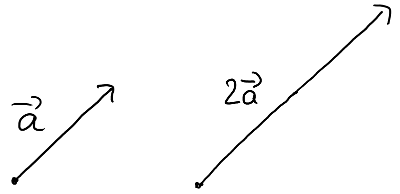
Summenvektor ist die Diagonale des Parallelogramms

andere Diagonale des Parallelogramms

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ Kommutativgesetz

$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ Assoziativgesetz

Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar:



$2\vec{a}$ ist doppelt so lang wie $\vec{a}$

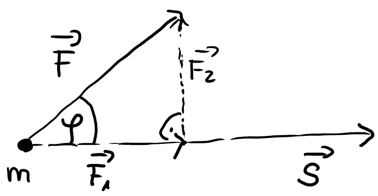
Multiplikation mit dem Skalar 2

geg.: $\vec{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda \cdot \vec{a}$ ist das λ-fache von $\vec{a}$ und hat die Länge $\lambda \cdot |\vec{a}|$

"Produkte" für Vektoren

Skalarprodukt $\boxed{\text{Ergebnis ist ein Skalar}}$

Herleitung aus der Physik:



$\vec{F}$ wird zerlegt in $\vec{F_1}$ und $\vec{F_2}$ (Teilkräfte)

$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$

Die Arbeit W, die $\vec{F}$ an m auf dem Weg $\vec{s}$ verrichtet ("Kraft × Weg")

$W = |\vec{F_1}| \cdot |\vec{s}|$ Es gilt: $\cos\varphi = \dfrac{|\vec{F_1}|}{|\vec{F}|}$ $\dfrac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$

$\Rightarrow |\vec{F_1}| = |\vec{F}| \cdot \cos\varphi$

$\Rightarrow W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos\varphi$

Def (Skalarprodukt) $\vec{a}, \vec{b}$ Vektoren $\varphi = \sphericalangle \vec{a}, \vec{b}$ $0 \leq \varphi \leq \pi$

$c = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$ Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b} = c$

Achtung: Das Skalarprodukt liefert keinen Vektor als Ergebnis, sondern eine reelle Zahl (Skalar) !

Bem: $|\vec{a}| \geq 0$ und $|\vec{b}| \geq 0$, so ist
$\vec{a}\cdot\vec{b} \geq 0$ falls $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$
$\vec{a}\cdot\vec{b} \leq 0$ falls $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$

Eigenschaften:

gilt $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$? Ja

Es gilt: $\vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{a}^2 > 0$ falls $\vec{a} \neq \vec{0}$
(folgt aus $|\vec{a}| > 0$ und $\cos 0 = 1$)

$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (ohne Beweis)

$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$ Distributivgesetz (ohne Beweis)

$\underset{\text{"senkrecht"}}{\vec{a}\perp\vec{b}} = \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ (da $\cos 90° = 0$)

Gilt $\vec{a}\cdot(\underbrace{\vec{b}\cdot\vec{c}}_{\text{Skalar } \lambda_1}) = (\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}_{\text{Skalar } \lambda_2})\cdot\vec{c}$?

$\vec{a}\cdot\lambda_1$ $\lambda_2\cdot\vec{c}$

unterschiedliche Vektoren

Also: gilt nicht !

Anwendung Skalarprodukt:

Bp: Es ist $\vec{a}\cdot\vec{a} = 16$ $\vec{b}\cdot\vec{b} = 25$ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 15$

gesucht $\measuredangle\, \vec{a},\vec{b} = \varphi$ $c = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$

$|\vec{a}| = 4$ $|\vec{b}| = 5$ $c = 15$

$15 = 4\cdot 5\cdot\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \Rightarrow \varphi = \arccos\frac{3}{4} = 41{,}4°$

Weitere Möglichkeit eines "Produktes" zwischen Vektoren : Vektorprodukt

Def : $\vec{a}, \vec{b}$ $\quad \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ $\quad \vec{a} \nparallel \vec{b}$ $\quad \varphi = \sphericalangle \vec{a}, \vec{b}$ $\quad (0 < \varphi < \pi)$

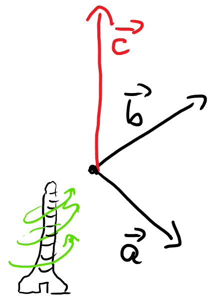
Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ (Kreuzprodukt)

liefert einen Vektor $\vec{c}$ mit folgenden Eigenschaften

(1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$

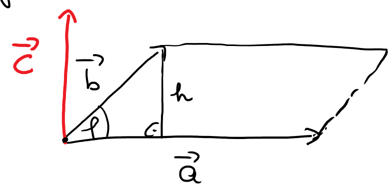
(2) $\vec{c}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$

(3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden ein Rechtssystem



Wenn eine Schraube eingedreht wird, zeigt $\vec{c}$ in diese Richtung

Geometrische Deutung :



$$\frac{h}{|\vec{b}|} = \sin\varphi$$

$$h = |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$$

Flächeninhalt des Parallelogramms :

$$|\vec{a}| \cdot h = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot \sin\varphi$$

Maßzahl $|\vec{c}|$ repräsentiert den Flächeninhalt des Parallelogramms

Vektorrechnung unter Verwendung eines Koordinatensystems

Vektorendarstellung höherer Dimensionen durch reelle Zahlen

Möglichkeit, den 3D-Raum zu verlassen ($\rightarrow$ n-dimensionaler Vektorraum)

Vorbemerkung:

$\vec{a}, \vec{b}$ $\quad \vec{b} = \frac{2}{3}\vec{a}$, d.h. $\vec{b}$ und $\vec{a}$ parallel

$$\downarrow$$
$$3\vec{b} = 2\vec{a}$$
$$\downarrow$$
$$3\vec{b} - 2\vec{a} = \vec{0}$$

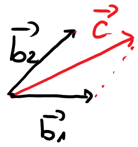
Der Nullvektor ist eine Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$

Def: (Linearkombination)

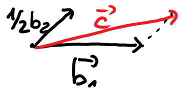
Geg: $\vec{b_1}, \ldots\ldots, \vec{b_n}$

$\vec{a}$ heißt Linearkombination von $\vec{b_1}$ bis $\vec{b_n}$, wenn gilt

$$\vec{a} = \lambda_1 \cdot \vec{b_1} + \lambda_2 \cdot \vec{b_2} + \ldots\ldots + \lambda_n \cdot \vec{b_n} \qquad (\lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathbb{R})$$

Bp: 

$c = 1 \cdot \vec{b_1} + 1 \cdot \vec{b_2}$



$\vec{c} = \vec{b_1} + \frac{1}{2}\vec{b_2}$

Def: Linear abhängige Vektoren

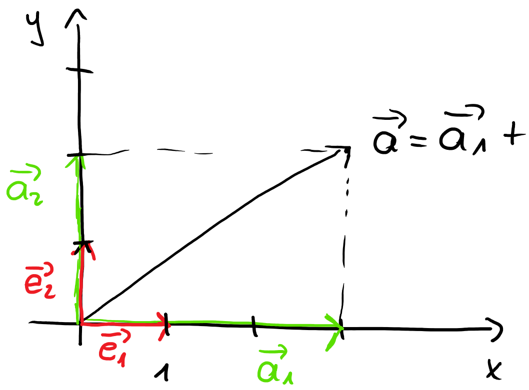
$\vec{b_1}, \ldots \vec{b_n}$ $\boxed{\text{linear abhängig}}$ $\Longleftrightarrow$ es ex. $\lambda_1 \ldots \lambda_n \in \mathbb{R}$ ($\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ nicht alle gleich 0)

mit $\lambda_1 \vec{b_1} + \lambda_2 \vec{b_2} + \ldots + \lambda_n \vec{b_n} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{b_i} = \vec{0}$

Def: Linear unabhängige Vektoren

Gilt $\lambda_1 \vec{b_1} + \lambda_2 \vec{b_2} + \ldots \lambda_n \vec{b_n} = \vec{0}$ nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots \lambda_n = 0$, dann sind $\vec{b_1}, \ldots \vec{b_n}$ $\boxed{\text{linear unabhängig}}$

Koordinaten eines Vektors



$\vec{a} = \vec{a_1} + \vec{a_2} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

$\vec{a_1} = |\vec{a_1}| \cdot \vec{e_1}$ $\quad |\vec{a_1}| := a_1$

$\vec{a_2} = |\vec{a_2}| \cdot \vec{e_2}$ $\quad |\vec{a_2}| := a_2$

$\vec{a} = |\vec{a_1}| \cdot \vec{e_1} + |\vec{a_2}| \cdot \vec{e_2}$

$\vec{a} = \underline{a_1} \cdot \vec{e_1} + \underline{a_2} \cdot \vec{e_2}$

$\vec{e_1}, \vec{e_2}$ Einheitsvektoren (Länge 1)
linear unabhängig