Vorlesung Mathe 1 7.12.22

wexd.io/ds

Hinweis auf meine Evaluation
Link demnächst

Hinweis auf die Studie

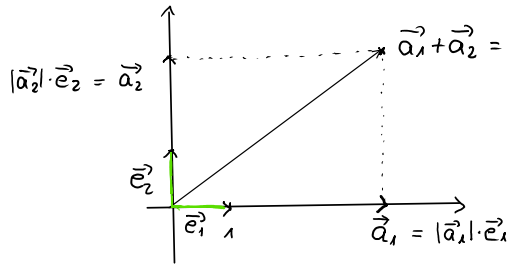
Lineare Algebra

Linear unabhängige Vektoren : keine Vielfache voneinander
nicht parallel
nicht gleich
"windschief" : zeigen in verschiedene Richtungen

lin. abh.

lin. unabh.

Koordinatenschreibweise von Vektoren



mit $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \end{pmatrix}$

$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |\vec{e}_1|\cdot\vec{e}_1 + 0\cdot\vec{e}_2$ (1 ↑)

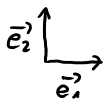
$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^2$

Ebene

2-dimensional

Man sagt : $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ bilden eine Basis



Andererseits :

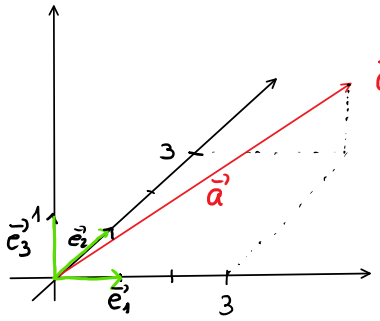
$1\cdot\vec{b}_1 + 1\cdot\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis $\vec{b}_1, \vec{b}_2$

"Basiswechsel"

$\vec{b}_1, \vec{b}_2$ lin. unabh.

$\mathbb{R}^3$ Raum

$\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ stehen senkrecht aufeinander und haben die Länge 1



$$\vec{a} = 3\cdot\vec{e_1} + 3\vec{e_2} + 1\cdot\vec{e_3} = \begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \vec{e_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \vec{e_3} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$

Betrachtungsweise ausdehnen auf $\mathbb{R}^n$ (n-dimensionalen Raum)

Eine Basis des $\mathbb{R}^n$ ist z.B. $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n}$ n Einheitsvektoren (Länge 1)

$$\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$$

Solche "Räume" mit Vektoren nennt man Vektorräume

Vektoren in der Koord.schreibweise: "Auflistung" von Maßzahlen

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots \quad \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix} \quad (\ldots\ldots)$$

$\mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}^3$ $\mathbb{R}^4$ $\mathbb{R}^n$ Spaltenvektor Zeilenvektor

Paar Tripel Quadrupel n-Tupel

Rechnen mit Vektoren in der Koordinatenschreibweise

Def. (Gleichheit von Vektoren)

$\vec{a}, \vec{b}$ m-dimensionale Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_i\\\vdots\\a_m\end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix}b_1\\\vdots\\b_i\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$

$\vec{a} = \vec{b} \iff a_i = b_i$ für alle $i = 1, \ldots, m$

Def. (Addition (Subtraktion) von Vektoren)

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_m\end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1 \pm b_1\\a_2 \pm b_2\\\vdots\\a_m \pm b_m\end{pmatrix}$$

Skalares Vielfaches

Aufgabe: Vollziehen Sie die Addition an einem Bp im $\mathbb{R}^2$ nach! Skizze!

$$\lambda \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_m \end{pmatrix} \qquad \text{falls } \lambda = 0 \Rightarrow 0 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ Nullvektor}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$

Def: (Vektorraum)

Addition, Subtraktion, Multipl. m. Skalar von m-dim. Vektoren ergeben wieder m-dim. Vektoren

$\Rightarrow$ m-dimensionalen Vektorraum V

Def: Die Maximalzahl m linear unabh. Vektoren des Vektorraums V heißt die Dimension von V : $\dim V = m$

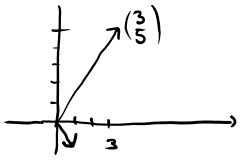
Bp: $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ $\quad \dim \mathbb{R}^3 = 3$ $\quad \ldots$ $\quad \dim \mathbb{R}^n = n$

Basis z.B. $\vec{e}_1, \vec{e}_2$

Def: (Basis)

Jede Teilmenge B von V, deren Vektoren lin. unabh. sind und die den gesamten Vektorraum "aufspannen" (d.h. man kann durch Lin.kombination alle anderen Vektoren von V erhalten) heißt Basis von V

Bp.: Geg. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Bilden $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$?



$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I $\lambda_1 \cdot 3 + \lambda_2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -3\lambda_1$ * in II

II $\lambda_1 \cdot 5 - \lambda_2 \cdot 1 = 0$

$\lambda_1 \cdot 5 + 3\lambda_1 = 0 = 8\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$ mit * $\lambda_2 = 0$

Antwort: $\vec{a}, \vec{b}$ bilden eine Basis

Def: Länge eines Vektors

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \qquad \vec{a} \in \mathbb{R}^m$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_m^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_i^2}$$

Betrag, Länge, Norm

Bp: $|\vec{e}| = 1$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad |\vec{a}| = \sqrt{5^2 + 7^2 + 9^2 + 10^2} = \sqrt{255} \approx 15.96$$

Skalarprodukt in der Koordinatenschreibweise:

Zur Erinnerung: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$ $\qquad \varphi = \sphericalangle \vec{a}, \vec{b}$ Ergebnis war eine Zahl!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n b_n$$

Ergebnis ist auch eine Zahl!

Bp: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = 100$

Def: Orthogonale Vektoren

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^m$ $\vec{a}$ orthogonal zu $\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Def: Winkel zwischen Vektoren in $\mathbb{R}^3$ $\qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Def: gilt nur für Vektoren aus $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

Es wird nicht besprochen: Analytische Geometrie

Geraden, Ebenen mit Vektordarstellung

Einführung in die Matrizenrechnung

Bp: Klimadaten

Vektor für den Januar $\begin{pmatrix} 6 \\ 21 \\ 15 \\ 7 \end{pmatrix}$ Sonnenstunden, Tagestemp., Nachttemp., Regentage

Auflistung für jeden Monat liefert eine "Matrix"

	Jan	Feb	März	...	Dez
Sonn.					
Tagestt.					
Nachtt.					
Regentag					

Def. (Matrix)

Ein rechteckiges Zahlenschema bestehend aus m Zeilen und n Spalten $(m, n \in \mathbb{N})$

heißt $(m \times n)$-Matrix

"m kreuz n"

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & & a_{mk} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

i-te Zeile, k-te Spalte

k-te Spalte

i-te Zeile

i-te Zeile, k-te Spalte

$a_{ik} \in \mathbb{R}$ Elemente der Matrix

$i = 1, \dots, m$ i Zeilenindex

$k = 1, \dots, n$ k Spaltenindex

Merke: Zeile zuerst, Spalte später

$m \times n$ Dimension der Matrix

Bem: $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ Spaltenvektor, kann auch als Matrix aufgefasst werden der Dimension $(m \times 1)$

(m Zeilen, 1 Spalte)

$B = (b_{11}\ b_{12}\ \dots\ b_{1n})$ Zeilenvektor hat, als Matrix aufgefasst, die Dimension $(1 \times n)$

Wichtig ist die Bedeutung der Koeffizienten, die durch eine Kopfspalte (=Spaltenüberschriften) (Monate im Bp)
und einer Kopfzeile (Zeilenüberschriften) (Sonnentage, Temp, etc.)
vorgenommen wird.

Matrizen in Form von Tabellen findet man "überall"
- Klimadaten
- Aktien-Indizes
- Fußball-, Handballtabellen
- Bedarfstabellen
- Input/Outputtabellen

Vorab: Spezielle Matrizen

1) Quadratische Matrizen

A quadratisch $\Leftrightarrow$ $m = n$

Zeilenzahl = Spaltenzahl

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Hauptdiagonale a_{ii} von links oben nach rechts unten

2) Diagonalmatrizen

A quadratisch

$a_{ij} = 0$ für $i \neq j$

$a_{ij} \neq 0$ für $i = j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Alles 0, außer Hauptdiagonale

3) Einheitsmatrix

Rücksicht im $\mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Einheitsvektoren

$\longrightarrow$ nebeneinander in Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ Einheitsmatrix im $\mathbb{R}^3$

Diagonalmatrix mit Hauptdiagonalen bestehend aus "1"

A quadratisch $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$

$a_{ij} = 1$ für $i = j$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Bem: Die Einheitsmatrix hat die "Rolle der 1" bei der Matrizenmultiplikation (→ später)

4) Die Transponierte einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \longrightarrow A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Aus Zeilen → Spalten
Aus Spalten → Zeilen

Es gilt $(A^t)^t = A$ $\quad$ A Diagonalmatrix : $A^t = A$

5) Symmetrische Matrizen

A symmetrisch $\Leftrightarrow$ $A = A^t$ $\quad$ $a_{ij} = a_{ji}$ für alle $i, j = 1, \ldots, m$

A symmetrisch $\Leftrightarrow A = A'$ $\quad a_{ij} = a_{ji}$ für alle $i,j = 1,\dots,m$

Ist

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 18 & 14 & 12 \\ 18 & 4 & 7 & 1 \\ 14 & 7 & 6 & 30 \\ 12 & 1 & 30 & 11 \end{pmatrix}$$ symmetrisch? Ja

6) Dreiecksmatrizen

Quadratische Matrizen, Koeffizienten oberhalb oder unterhalb der Hauptdiagonalen gleich 0

Bp:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 9 & 0 & 0 \\ 10 & 12 & 4 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

untere Dreiecksmatrix

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

obere Dreiecksmatrix