

Vorlesung Mathematik 14.12.22

Rechnen mit Matrizen

Def: Addition, Subtraktion, Multiplikation mit einem Skalar
geg. A, B ($m \times n$)-Matrizen (gleiche Dimension), $\lambda \in \mathbb{R}$

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{mit } c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

$$= \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & \dots & d_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{mit } d_{ij} = \lambda a_{ij}$$

Merke: immer die entsprechenden Koeffizienten werden addiert/subtrahiert

Rechengesetze: A, B ($m \times n$)-Matrizen

(1) $A + B = B + A$ Kommutativgesetz

(2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ Assoziativgesetz

(3) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ Distributivgesetz

$(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda A + \mu A$

(4) $A + O = A$ Nullmatrix "Neutralelement"

(5) Zu jeder Matrix A ex. Matrix D mit $A + D = 0$
Nullmatrix

$$D = -A = -1 \cdot A = \begin{pmatrix} -a_{11} & \dots & -a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

(6) $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$

Aufgabe: Demonstrieren Sie an einem eigenen Beispiel die Gültigkeit von (6)

Multiplikation von Matrizen

Erinnerung: Skalarprodukt bei Vektoren

Bp.: 3 Autofirmen F_1, F_2, F_3 produzieren Kleinwagen (K)
Mittelklassewagen (M)
Oberklasse (O)

Tabelle für die jährlich produzierten Stückzahlen:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} K & M & O \end{matrix} \\ \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1000 & 1500 & 500 \\ 1500 & 1000 & 600 \\ 700 & 1400 & 800 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (3 \times 3)\text{-Matrix}$$

Die Einnahmen, die pro Auto in den Jahren 2018-2021 erzielt wurden:

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2018 & 2019 & 2020 & 2021 \end{matrix} \\ \begin{matrix} K \\ M \\ O \end{matrix} & \begin{pmatrix} 9900 & 10000 & 10500 & 11000 \\ 19000 & 19500 & 20000 & 21000 \\ 30000 & 31000 & 31500 & 33000 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (3 \times 4)\text{-Matrix}$$

Frage: Wie stellen Sie die Einnahmen der Firmen in 2018-2021 dar?

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 2018 & 2019 & 2020 & 2021 \end{matrix} \\ \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 53,4 & 54,75 & 56,25 & 59,0 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{Zeile 1 v. A} \\ \times \text{Spalte 2 v. B} \\ \\ \text{Zeile 3 v. A} \\ \times \text{Spalte 4 v. B} \end{matrix} \quad \text{in Mio}$$

Man beginnt: Einnahmen der Firma F_1 im Jahr 2018

$$1000 \cdot 9900 + 1500 \cdot 19000 + 500 \cdot 30000 = 53400000 = 53,4 \text{ Mio}$$

Skalarprodukt aus 1. Zeile der Matrix A und der 1. Spalte der Matrix B
Zeile $\times$ Spalte (Dimension muss übereinstimmen!)

$$\text{Ergebnis: } \begin{matrix} & \begin{matrix} 2018 & 2019 & 2020 & 2021 \end{matrix} \\ \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 53,4 & 54,75 & 56,25 & 59,0 \\ 51,85 & 53,1 & 54,65 & 57,3 \\ 57,53 & 59,1 & 60,55 & 63,5 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (3 \times 4)\text{-Matrix}$$

Skalarmultiplikation
2. Zeile von A
 $\times$ 3. Spalte von B

Def.: Matrizenmultiplikation

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$(m \times n)$ -Matrix

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nl} \end{pmatrix}$$

$(n \times l)$ -Matrix

Achtung: Die Anzahl der Spalten von A muss mit der Anzahl der Zeilen von B übereinstimmen!

$$A \cdot B = C \quad \text{mit} \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{ml} \end{pmatrix} \quad (m \times l)\text{-Matrix}$$

$$\text{mit } c_{ij} = A_i \cdot B_j = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$$

$\uparrow$ $\nwarrow$
i-te Zeile $\quad$ *j-te Spalte*
 von A $\quad$ von B

Im Eingangsbeispiel: $(3 \times 3) \cdot (3 \times 4) = (3 \times 4)$

Frage: Welche Produkte aus folgenden Matrizen können gebildet werden?

A (3×4) -Matrix

B (5×4) -Matrix

C (4×5) -Matrix

A · C (3×5) -Matrix

B · C (5×5) -Matrix

C · B (4×4) -Matrix

(A · C) · B (3×4) -Matrix

Frage: Gilt für die Matrizenmultiplikation das Kommutativgesetz?

Nein $A \cdot B \neq B \cdot A$ Spaltenzahl von A = Zeilenzahl von B

Frage: Gilt das Assoziativgesetz? das gilt nicht immer! ∇

A, B, C Matrizen $A \cdot B$ definiert und $B \cdot C$ sei definiert

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

ja, bitte an einem Beispiel überprüfen

Weiter gilt:

$$\left. \begin{aligned} A \cdot (B + C) &= A \cdot B + A \cdot C \\ (A + B) \cdot C &= A \cdot C + B \cdot C \end{aligned} \right\} \text{Distributivgesetz}$$

$$\lambda(A \cdot B) = \lambda \cdot A \cdot B = A \cdot \lambda B, \lambda \in \mathbb{R}$$

Unterschiede zur Multiplikation in $\mathbb{R}$:

In $\mathbb{R}$: $a^2 = a \Rightarrow a = 1$ oder $a = 0$

Bei Matrizen: $A^2 = A$ mit $A \neq E, A \neq 0$

↑
Einheitsmatrix

$$\text{Bp: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In $\mathbb{R}$: $b \cdot c = 0 \Rightarrow b = 0$ oder $c = 0$

Bei Matrizen: $B = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad B \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Die Inverse einer Matrix

$$\text{In } \mathbb{R}: a \cdot x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{a} = a^{-1} \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

$$a \cdot a^{-1} = 1 \quad a^{-1} \text{ ist das inverse Element zu } a \text{ in } \mathbb{R}$$

Def. (Inverse Matrix)

A ($n \times n$)-Matrix quadratisch

B heißt Inverse von A ($B = A^{-1}$)

$$\Leftrightarrow A \cdot B = B \cdot A = \underset{\uparrow}{E} \\ \text{Einheitsmatrix}$$

A heißt regulär $\Leftrightarrow A$ besitzt eine Inverse, sonst heißt A singular

Ohne Beweis: Satz: Jede reguläre Matrix besitzt genau eine Inverse

Frage: Wie berechne ich eine Inverse?

$$\text{Sei } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{gesucht } A^{-1}$$

$$\text{Es muss gelten: } A \cdot A^{-1} = E$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{11} \cdot x_{11} + a_{12} \cdot x_{21} = 1$$

$$a_{11} \cdot x_{12} + a_{12} \cdot x_{22} = 0$$

$$a_{21} \cdot x_{11} + a_{22} \cdot x_{21} = 0$$

$$a_{21} \cdot x_{12} + a_{22} \cdot x_{22} = 1$$

4 Gleichungen mit 4 Unbekannten

Aufwändige Umformungen liefern:

$$x_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{22}} x_{11}$$

$$\text{und } \boxed{(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})} \cdot \boxed{x_{11}} = a_{22}$$

$$\boxed{(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})} \cdot \boxed{x_{21}} = -a_{21}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) \cdot x_{21} &= -a_{21} \\ (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) \cdot x_{12} &= -a_{12} \\ (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) \cdot x_{22} &= a_{11} \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Setze $D = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \rightarrow$ später D heißt Determinante

$$\text{Dann ist } A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Einschub: Permutationen $1 \cdot 1 = 1!$ 1 Element 1 Anordnung
 $1 \cdot 2 = 2!$ 2 Elemente 2 Anordnungen $\uparrow \bullet \uparrow \bullet \uparrow \bullet \uparrow \bullet$
 $1 \cdot 2 \cdot 3 = 3!$ 3 Elemente ? Anordnungen $\bullet \bullet \bullet$

$$\begin{aligned} \text{Bp: } A &= \begin{pmatrix} 12 & 20 \\ 1 & 11 \end{pmatrix} & A^{-1} &= \frac{1}{112} \begin{pmatrix} 11 & -20 \\ -1 & 12 \end{pmatrix} & D &= 12 \cdot 11 - 1 \cdot 20 = 112 \\ & & & = \begin{pmatrix} \frac{11}{112} & -\frac{5}{28} \\ -\frac{1}{112} & \frac{3}{28} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Überprüfen Sie das Ergebnis zu Hause!

Rechenregeln

$$(1) (A^{-1})^{-1} = A$$

$$(2) (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

$$(3) (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$(4) (\lambda \cdot A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \cdot A^{-1} \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Anwendungsgebiete der Matrizen

(1) Materialbedarfsmatrizen bei Produktionsprozessen

Bp: Eine Firma produziert Gartenhäuser der Typen Alb, Rhön, Taunus

$$M := \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Stahl} & \text{Holz} & \text{Glas} & \text{Arbeitsstunden} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{Alb} \\ \text{Rhön} \\ \text{Taunus} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 & 17 \\ 7 & 8 & 5 & 21 \\ 6 & 7 & 7 & 15 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (3 \times 4)\text{-Matrix}$$

$$\text{Auftrag } A = \begin{pmatrix} \text{Alb} & \text{Rhön} & \text{Taunus} \\ 5 & 6 & 12 \end{pmatrix} \quad (1 \times 3)\text{-Matrix}$$

Materialbedarf für Auftrag berechnet sich aus: $A \cdot M$

$$A \cdot M = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 & 17 \\ 7 & 8 & 5 & 21 \\ 6 & 7 & 7 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 139 & 162 & 134 & 391 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{Stahl} & \text{Holz} & \text{Glas} & \text{Arbeit} \end{matrix}$$

$(1 \times 4)\text{-Matrix}$

$$P: \begin{pmatrix} 15 \\ 30 \\ 3 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Preismatrix

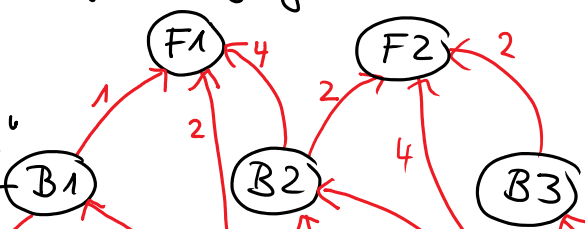
Frage: Berechnung der Herstellungskosten für den Auftrag A?

$$\text{Antwort: } A \cdot (M \cdot P) = (A \cdot M) \cdot P = 17122$$

2. Beispiel : Zweistufige Fertigung

Gozintograph

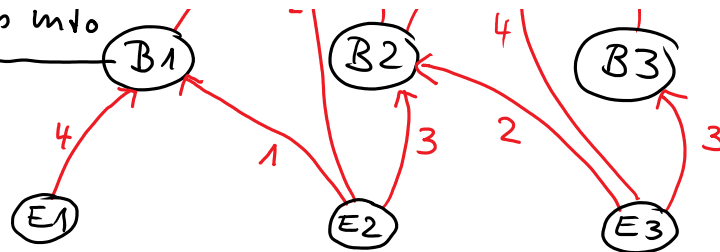
"the part that goes into"



2 Fertigungsteile

Drei Baugruppen

the part that goes into



Drei Baugruppen

Drei Einzelteile

Aus dem Gozintographen wird eine sog. Teilebedatfomatrix aufgestellt

T: =

	F1	F2
F1	1	0
F2	0	1
B1	1	0
B2	4	2
B3	0	2
E1	4	0
E2	15	6
E3	8	14