

Vorlesung 21.12.2022

Vorhanden : Teilebedarfsmatrix T 8×2 Bp
 Zeitbedarfsmatrix Z : $\downarrow$ $\begin{matrix} M1 \\ M2 \\ M3 \\ M4 \\ M5 \end{matrix}$ $\begin{pmatrix} F1 & F2 & B1 & B2 & B3 & E1 & E2 & E3 \\ & & 0,1 & & & 0,2 & 0,5 & \\ & & & 0,2 & & & 0,4 & 0,6 \\ & & & & 0,2 & 0,6 & & 0,1 \\ 0,6 & 0,1 & 0,2 & 0,4 & & & 0,3 & \\ & 0,7 & 0,1 & 0,5 & & & & 0,1 \end{pmatrix}$ 5×8

Frage : Wie lange sind M1 bis M5 für die Festigung je eines F1 und F2 belegt?

$$A = \underset{5 \times 8}{Z} \cdot \underset{8 \times 2}{T} = \underset{5 \times 2}{\begin{matrix} M1 \\ M2 \\ M3 \\ M4 \\ M5 \end{matrix}} \begin{pmatrix} F1 & F2 \\ 8,4 & 3 \\ 11,6 & 11,2 \\ 3,2 & 1,8 \\ 6,9 & 2,7 \\ 1,2 & 3,3 \end{pmatrix}$$

bitte in Ruhe nachrechnen!

Frage : Bestellung $B := \begin{pmatrix} F1 \\ F2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}_{2 \times 1}$ 5×2

Wie sind die Maschinen für diese Bestellung belegt?

Antwort : $A \cdot B = \underset{5 \times 1}{\begin{matrix} M1 \\ M2 \\ M3 \\ M4 \\ M5 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 990 \\ 1720 \\ 410 \\ 825 \\ 285 \end{pmatrix}$

Rang einer Matrix

Die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilen oder Spalten wird als der Rang der Matrix bezeichnet

$$\text{rg}(A) \quad \text{"Rang von A"}$$

Bem : Zeilenrang = Spaltenrang

Bp : $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\text{rg}(E) = 4$
 Einheitsmatrix

Bem : A sei $(m \times n)$ Matrix , dann ist $\text{rg}(A) \leq \min\{m, n\}$

Bem : A heißt regulär $\Leftrightarrow A^{-1}$ existiert $\Leftrightarrow A$ besitzt den vollen Rang

Rangbestimmung

Es gilt: Jede $(m \times n)$ -Matrix kann durch endlich viele elementare Zeilenumformungen in eine Matrix von Zeilenstufenform

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightarrow \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Elementare Zeilenumformungen:

- I. Multiplikation der i -ten Zeile mit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 - II. Addition der j -ten Zeile zur i -ten Zeile
 - III. Addition der λ -fachen j -ten Zeile zur i -ten Zeile
 - IV. Vertauschen der i -ten mit der j -ten Zeile
- } lineare Umformungen

Merke: Die Zeilenumformungen verändern den Rang einer Matrix nicht!

Rangbestimmung einer Matrix in Zeilenstufenform:

Zählen der Zeilen, die nicht nur aus Nullen bestehen

Bp: $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot 7} \begin{pmatrix} -14 & 21 & -7 \\ 0 & 2 & 5 \\ 14 & -2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\cdot 19 \\ +21}} \begin{pmatrix} -14 & 21 & -7 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 19 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot 2} \begin{pmatrix} -14 & 21 & -7 \\ 0 & 38 & 95 \\ 0 & 38 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-22} \begin{pmatrix} -14 & 21 & -7 \\ 0 & 38 & 95 \\ 0 & 0 & -93 \end{pmatrix}$

$\text{rg}(A) = 3$

Bp: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot 2} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{+21} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-22}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\text{rg}(A) = 2$

Bp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot 2} \begin{pmatrix} 2 & 18 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{+21} \begin{pmatrix} 2 & 18 \\ 0 & -16 \end{pmatrix}$ $\text{rg}(A) = 2$

Lineare Gleichungssysteme (GS)

Eingangsbeispiel: $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$$a - b + c - d + e = 0$$

$$81a + 27b + 9c + 3d + e = 0$$

$$e = -3$$

$$108a + 27b + 6c + d = 0$$

$$d = 0$$

5 lineare Gleichungen

5 Unbekannte

mit * : $a - b + c = 3$
 $81a + 27b + 9c = 3$
 $108a + 27b + 6c = 0$

reduzierte GS 3 Unbekannte

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 81 & 27 & 9 & 3 \\ 108 & 27 & 6 & 0 \end{array} \right)$$

erweiterte Koeffizientenmatrix des GS

Lineares GS (LGS)

m Gleichungen und n Variablen

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$n \times 1$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$m \times 1$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m \times n$

Das LGS kann geschrieben werden als $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

Bp: $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$

Zugehöriges LGS : $2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 12$
 $-x_1 + 4x_3 = 8$

Bp: $4x_1 + 20x_2 + 5x_3 = 10$
 $2x_1 - 5x_2 - \frac{1}{2}x_3 = -20$
 $-x_1 + x_2 - 3x_3 = 8$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 20 & 5 \\ 2 & -5 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Def: homogenes LGS

LGS heißt homogen $\Leftrightarrow \vec{b} = \vec{0}$

Zur Vereinfachung beim Lösen von LGS: Übergang auf die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Lösungswege LGS - Grundlagen

1) Lösung einer linearen Gleichung

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b_1$$

Fall 1: $n=1$ 1 Unbekannte $a_1 x_1 = b_1$ $a_1 \neq 0$
 $x_1 = \frac{b_1}{a_1}$ eine Lösung

Bp: $4x = 16 \Rightarrow x = \frac{16}{4} = 4$
 $\mathbb{L} = \{4\}$

Fall 2: $n=2$ 1 Gleichung, 2 Unbekannte

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = b_1$$

Nach x_1 auflösen: $x_1 = \frac{b_1}{a_1} - \frac{a_2}{a_1} x_2$ (*)

NB: $y = mx + b$

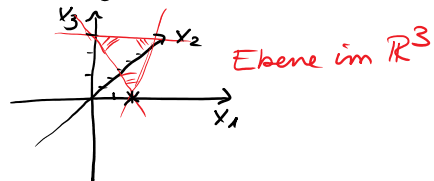
Es gibt unendlich viele Lösungen, die durch (*) näher beschrieben sind, einer Geradengleichung.

Fall 3: $n=3$ 1 Gleichung, 3 Unbekannte

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b_1$$

Nach x_1 auflösen liefert eine "Ebene"

Bp: $3x_1 + x_2 + 2x_3 = 6$



Fall 4: $n=4$

"Hyperebene"

Frage: Was benötige ich bei einer Gleichung mit 2 Unbekannten, um eine eindeutige Lösung zu erhalten?

Antwort: eine 2. Gleichung

2 Gleichungen mit 2 Unbekannten, die gleichzeitig gelten

Bem: Jede Gleichung bindet einen Freiheitsgrad

(bei 3 Unbekannten können 2 Parameter frei gewählt werden, die 3. Variable ist dann aber abhängig)

Verallgemeinerung:

Bei einem LGS mit n Variablen benötigt man mindestens n Gleichungen
Dazu müssen Anforderungen an die Gleichungen gestellt werden
 $\Rightarrow$ "Lineare Unabhängigkeit"

Def: 1) LGS mit m Gleichungen und n Variablen

heißt exakt bestimmt $\Leftrightarrow m = n$

Das LGS hat eine eindeutige Lösung $\Leftrightarrow$ alle Gleichungen sind lin. unabhängig

2) LGS überbestimmt $\Leftrightarrow m > n$

3) LGS unterbestimmt $\Leftrightarrow m < n$

Bem: Bestimmung der lin. unabh. Gleichungen in einem LGS:

durch äquivalente Umformungen an der erweiterten Koeffizientenmatrix
des LGS

Äquivalente Umformungen sind (o. Rangbestimmung einer Matrix)
(durchzuführen an der erw. Koeff. matrix)

1) Vertauschen der Reihenfolge der Gleichungen und auch der Variablen

2) Multiplikation einer Gleichung mit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

3) Addition einer Gl. zu einer anderen Gl.
(Subtraktion)

4) Gleichungen in einem LGS dürfen linear kombiniert werden

1) - 4) ändern die Lösungen nicht

Der Gauß'sche Lösungsalgorithmus (Gauß'sche Eliminationsverfahren)

(Carl Friedrich Gauß
1777 - 1855)

Vorgehen anhand eines Beispiels

Erw. Koeff. matrix

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & | & \\ 2 & -2 & 3 & 2 & | & 10 \\ 4 & 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & | & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} :4$$

1. Iteration

Auswahl einer Zeile und Auswahl einer Spalte : Kreuzungspunkt heißt Pivotelement

Das Pivotelement wird in eine 1 umgewandelt Zeile 2 dividiert durch 4

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & 2 & | & 10 \\ 1 & 1/4 & 1/2 & -1/4 & | & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & | & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 \times Z2 \\ \\ -3 \times Z2 \\ -Z2 \end{matrix}$$

Über und unter dem Pivotelement werden Nullen erzeugt

$$\begin{pmatrix} 0 & -5/2 & 2 & 5/2 & | & 10 \\ 1 & 1/4 & 1/2 & -1/4 & | & 0 \\ 0 & 5/4 & -1/2 & 15/4 & | & 5 \\ 0 & 3/4 & 7/2 & 5/4 & | & 1 \end{pmatrix} : \frac{4}{5}$$

2. Iteration 3. Zeile, 2. Spalte

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -5/2 & 2 & 5/2 & 10 \\ 1 & 1/4 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -2/5 & 3 & 4 \\ 0 & 3/4 & 7/2 & 5/4 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} +5/2 \cdot Z3 \\ -3/4 Z3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 10 & 20 \\ 1 & 1/4 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -2/5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 19/5 & -1 & -2 \end{array} \right) -19/5 \cdot Z1$$

3. Iteration 1. Zeile, 3. Spalte

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 10 & 20 \\ 1 & 1/4 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -2/5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -39 & -78 \end{array} \right) : -39$$

4. Iteration 4. Zeile, 4. Spalte

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 10 & 20 \\ 1 & 1/4 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -2/5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Vertauschen von Zeilen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ 1 & 1/4 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -2/5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$x_4 = 2$$

$$1 \cdot x_3 + 10 \cdot x_4 = 20 \quad x_3 + 20 = 20 \Rightarrow x_3 = 0$$

$$x_2 - 2/5 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 4 \Rightarrow x_2 + 6 = 4 \Rightarrow x_2 = -2$$

$$\text{Aus Zeile 1: } x_1 + \frac{1}{4}(-2) + \frac{1}{2}(0) - \frac{1}{4} \cdot 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

Rücksubstitution

In Worten: Teilweise Elimination und anschließende Substitution, jede Zeile und jede Spalte werden nur einmal ausgewählt

Frohe Weihnachten!