Mittwoch, 11. Januar 2023 08:48

Vorlesung 11.1.2023

Kurz: Gauß'scher LA

$\left(\begin{array}{ccc|c} \cdots & & & \vdots \\ \cdots & & & \end{array}\right)$ → elementare Umformungen → $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right)$

erweiterte Koeffizientenmatrix

Treppenstufenform

→ 1. Lösung: 1 Unbekannte

↓ Rücksubstituieren

Lineare Abhängigkeit, lin. Unabh. von Gleichungen

NB: Rangbestimmung $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}$ → elem. Zeilenumm. → $\left(\begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \\ & y_4 & y_5 \\ & & y_6 \end{array}\right)$

$rg\,A = 3$

→ $\left(\begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & y_4 & y_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $rg\,A = 2$

Bp: Lin. abh. Zeilen in einem GS

2 Brote und 10 Brötchen kosten 10 €
3 " " 15 " " 15 €

$2p_1 + 10p_2 = 10$
$3p_1 + 15p_2 = 15$

$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 10 & 10 \\ 3 & 15 & 15 \end{array}\right)$:2 Pivotzeile

Pivotspalte

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 5 \\ 3 & 15 & 15 \end{array}\right)$ − 3 × 21

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Fazit: Ein LGS ist genau dann lösbar, wenn gilt
mit m Gleichungen und n Unbekannten

$$rg\,A = rg\,(A|b) = m$$

Zusammenfassung

Ges. Lin. GS mit m Gleichungen und n Unbekannten

$m < n$: GS unterbestimmt
∞ Lösungen
lin. abh. Gl können eliminiert werden

$m = n$: GS bestimmt
gleich lin. unabh. $\Rightarrow$ es ex. eine eindeutige Lösung
falls lin. abh. Gl. ex $\Rightarrow$ Restsystem unterbestimmt

$m > n$: GS überbestimmt
mindestens $m-n$ Gl. lin. abhängig $\Rightarrow$ es ex. eine Lösung
$\Rightarrow$ es ex. ∞ Lösungen

In Betracht ziehen: widersprüchliche Gleichungen

Bp $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$ y

Historische Aufgabe:

Drei Reisende finden unterwegs einen Ranzen mit 73 Gulden
Sie stellen fest, dass diese 73 Gulden zusammen mit der Barschaft der ersten beiden das Doppelte dessen sind, was der erste und dritte und der zweite und dritte gemeinsam bei sich haben.
Die 73 Gulden ergeben aber auch mit dem Besitz des ersten und dritten das Dreifache dessen, was der zweite und dritte und der erste und zweite mit sich führen.
Und schließlich ergeben diese 73 Gulden zusammen mit der Barschaft des zweiten und dritten das Vierfache dessen, was der erste und zweite und der erste und dritte zusammen bei sich tragen.

Wieviele Gulden besitzt jeder der drei Reisenden?

Unbekannte: A, B, C

$$73 + A + B = 2(A+C+B+C) \quad \text{I}$$
$$73 + A + C = 3(B+C+A+B) \quad \text{II}$$
$$73 + B + C = 4(A+B+A+C) \quad \text{III}$$

$$\text{I}: 73 = 2A+2C+2B+2C-A-B \iff A+B+4C = 73$$
$$\text{II}: 73 = 3B+3C+3A+3B-A-C \iff 2A+6B+2C = 73$$
$$\text{III}: 73 = 4A+4B+4A+4C-B-C \iff 8A+3B+3C = 73$$

II : $73 = 3B + 3C + 3A + 3B - A - C$ $\Leftrightarrow$ $2A + 6B + 2C = 73$

III : $73 = 4A + 4B + 4A + 4C - B - C$ $\Leftrightarrow$ $8A + 3B + 3C = 73$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 73 \\ 2 & 6 & 2 & 73 \\ 8 & 3 & 3 & 73 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2 \times 1.Z. \\ -8 \times 1.Z. \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 73 \\ 0 & 4 & -6 & -73 \\ 0 & -5 & -29 & -511 \end{pmatrix} : 4 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 73 \\ 0 & 1 & -3/2 & -\frac{73}{4} \\ 0 & -5 & -29 & -511 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ +5 \times 2. \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 73 \\ 0 & 1 & -3/2 & -\frac{73}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{73}{2} & -\frac{2409}{4} \end{pmatrix}$$

$$-511 - \frac{365}{4}$$

$$\frac{-2044 - 365}{4}$$

$$-\frac{2409}{4}$$

$$-\frac{73}{2}C = -\frac{2399}{4} \quad | \cdot -\frac{2}{73}$$

$$C = -\frac{2409}{4_2} \cdot -\frac{2}{73} = \frac{33}{2} = 16.5 \qquad C : 16.5 \text{ Gulden}$$

Rücksubstitution: $B = 6.5$ Gulden

$A = 0.5$ Gulden

Hinweis auf andere Anwendungsbereiche: Input/Output-Analyse

LGS und die Inverse der Koeffizientenmatrix

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

LGS: $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ eindeutige Lösung $\vec{x} = \begin{pmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ \vdots \\ b_m^* \end{pmatrix}$

Lösung als LGS: $E \cdot \vec{x} = \vec{b}^*$

$$A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = E \cdot \vec{x} = \vec{b}^*$$

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

$$E \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

$$E\vec{x} = \vec{b}^* \quad \Rightarrow A^{-1} \cdot \vec{b} = \vec{b}^*$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ & & \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \ddots & & \\ 0 & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$ zu E umformen $\qquad \downarrow$ simultan dieselben Umformungen $\qquad A^{-1}$

Bp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ :2 \\ -2 \times 1.\text{Zeile} \end{matrix}$ gesucht A^{-1} $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A \to E$ $\qquad\qquad E \to A^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +3 \times 2.\text{Zeile} \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3.\text{Zeile} \\ -1/2 \times 3.\text{Zeile} \\ \times 2 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 \times 2.\text{Zeile} \\ \\ \\ \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{A^{-1}}$$

Probe: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Hinweis auf Lösung des Eingangsbeispiels: $y = \frac{1}{9}x^4 - \frac{8}{9}x^3 + 2x^2 - 3$

Fazit: Ein LGS mit n Gleichungen und n Unbekannten besitzt eine eindeutige Lösung $\Leftrightarrow$ $\text{rg}\, A = n$, A regulär, A besitzt Inverse

Determinanten

$D = a_{11} a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ $\qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\mathbb{D} = a_{11}a_{22} - a_{12}\cdot a_{21} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\mathbb{D}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$\mathbb{D}$ ist eine reelle Zahl, die aus allen Koeffizienten berechnet wird.

Wie wird sie berechnet?

A Matrix $\quad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1m} \\ \vdots \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{vmatrix}$

$A = (a_{11}) \quad \det A = a_{11}$ — 1 Element : 1 Möglichkeit

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ — 2 Elemente : 2 Möglichkeiten

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Anzahl der Inversion: 0, 2, 2, 1, 1, 1

3 Elemente : $2 \cdot 3 = 6$ Möglichkeiten $= 3!$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \quad \det A =$ 24 Summanden mit jeweils 4 Faktoren

Def: Geg. A $m \times m$ Matrix

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{P(j)} (-1)^{I(j)} a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdots a_{mj_m}$$

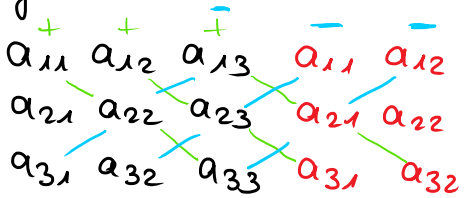
$P(j)$ Permutationen des Spaltenindex

I(j) Zahl der Inversionen (Anzahl der Vertauschungen "Wie oft mal wurde umgestellt")

Dringend Regeln zur vereinfachten Berechnung von Determinanten

Für 3-reihige Determinanten

Regel von Sarrus



$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + \ldots + - a_{13}a_{22}a_{31} - \ldots -$$

Bp: $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 8 \end{vmatrix} = -83$

Ziel: Berechnen von "höherreihigen" Determinanten

Eigenschaften von Determinanten

1) Vertauschen von Zeilen ändert ggf das Vorzeichen

$$\det A_{P(i)} = (-1)^{I(i)} \det A$$

2) Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda \det A$

dagegen: $\det(\lambda A) = \lambda^m \det A$

3) Addition zweier Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

4) Addition des λ-fachen einer Zeile zu einer anderen ändert den Wert der Determinante nicht

5) Sind Zeilen einer Matrix lin. abh., so ist $\det A = 0$

Grundlagen für die Berechnung höherreihiger Determinanten

1) Adjunkte und die adjungierte Matrix

Def: Unterdeterminante $(m-1)$-ter Ordnung

Streiche i-te Zeile und die j-te Spalte (Bezugspunkt: a_{ij})

$|A|_{ij}$ heißt Minor

gestrichen

$$|A|_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1j-1} & a_{1j+1} \dots a_{1m} \\ \vdots \\ a_{i-11} \\ a_{i+11} \\ \vdots \\ a_{m1} \dots a_{mj-1} & a_{mj+1} \dots a_{mm} \end{vmatrix}$$

Frage: Wieviele Minoren besitzt eine Determinante m-ter Ordnung?

Antwort: m^2 Minoren

Aufgabe: Berechnen Sie alle Minoren von $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 7 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Aufgabe: Berechnen Sie alle Minoren von $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 7 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$|A|_{11} = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$|A|_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 5 \qquad + 7 \text{ weitere Minoren}$$

Def: Adjunkte zum Element a_{ij} $\quad A_{ij} = (-1)^{i+j} |A|_{ij}$

beschreibt ein Vorzeichenmuster

$$\begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & & \\ + & & & \\ - & & & \\ \vdots & & & \end{matrix}$$

ist eine reelle Zahl ∇ 0

Fasst man alle Adjunkten zu einer Matrix zusammen, und bildet davon die Transponierte, so erhält man A_{ad} (adjungierte Matrix)

Der Entwicklungssatz von Laplace

Eine Determinante $|A|$ m-ter Ordnung kann entweder nach einer Zeile i oder einer Spalte j "entwickelt" werden

a) nach einer Zeile i:

$$\det A = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot A_{ij} = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{i+j} a_{ij} |A|_{ij}$$

b) nach einer Spalte j:

$$\det A = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+j} a_{ij} |A|_{ij}$$

Verdeutlichung: $\begin{vmatrix} \overset{+}{2} & \overset{-}{-1} & \overset{+}{0} \\ \overset{-}{4} & \overset{+}{2} & \overset{-}{-1} \\ \overset{+}{-2} & \overset{-}{3} & \overset{+}{1} \end{vmatrix}$ Entwicklung nach der 1. Zeile

$$\det A = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot 5 + 2 + 0 = 12$$

Zu Hause: Entwickeln Sie nach der 2. Spalte