

Vorlesung 18.1.2023

Der Entwicklungssatz von Laplace:

Schrittweise Reduzierung der Ordnung der Determinante

Bp:
$$\begin{vmatrix} \overset{+}{0} & \overset{-}{0} & \overset{+}{1} & \overset{-}{0} & \overset{+}{1} \\ \overset{-}{0} & \overset{+}{0} & \overset{-}{0} & \overset{+}{0} & \overset{-}{1} \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det A = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Entw.} \\ \text{nach der} \\ \text{2. Zeile}}}{(-1)} \cdot \begin{vmatrix} \overset{+}{0} & \overset{-}{1} & \overset{+}{0} & \overset{-}{0} \\ \overset{+}{0} & \overset{-}{1} & \overset{+}{1} & \overset{-}{1} \\ \overset{+}{1} & \overset{-}{0} & \overset{+}{0} & \overset{-}{0} \end{vmatrix}$$

$$\Downarrow \text{Entw. nach der 4. Zeile} \\ = (-1) \cdot \begin{vmatrix} \overset{+}{0} & \overset{-}{1} & \overset{+}{0} \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Downarrow \text{Entw. nach der 1. Zeile} \\ = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Downarrow \\ \text{Insgesamt: } \det A = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 2 \quad \begin{matrix} 2 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \\ = 2 \end{matrix} \\ = -2$$

Tipp: Wenn kaum Nullen in einer Zeile oder Spalte vorhanden sind, dann lohnen sich "Umformungen"

z. Bp: Erzeugen einer Dreiecksform: "Triangulieren"

$$\det A = \begin{vmatrix} \overset{+}{a_{11}} & \overset{-}{a_{12}} & \dots & a_{1m} \\ 0 & \overset{+}{a_{22}} & \dots & a_{2m} \\ 0 & 0 & \overset{+}{a_{33}} & \dots & a_{3m} \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2m} \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

$$\Downarrow \\ \text{Entw. nach der 1. Spalte} \\ a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & \dots & a_{3m} \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} \\ \Downarrow \\ \Downarrow$$

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \dots \cdot a_{mm}$$

Hinweise

- 1) A regulär $\Leftrightarrow \det A \neq 0$
 (A besitzt eine Inverse)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A_{\text{ad}}$$

- 2) Cramer'sche Regel

Geg: $A\vec{x} = \vec{b}$ GS A ($n \times n$) Matrix

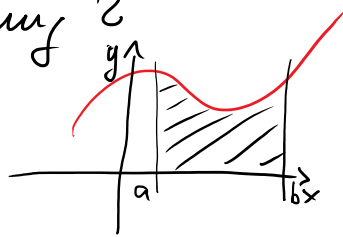
Bilde A_j : In A wird Spalte j durch $\vec{b}$ ersetzt

Dann sind die Lösungen des GS: $x_j = \frac{\det A_j}{\det A} \quad j=1, \dots, n$
 $\det A \neq 0$

Integralrechnung

Was ist Integralrechnung?

Flächenberechnung



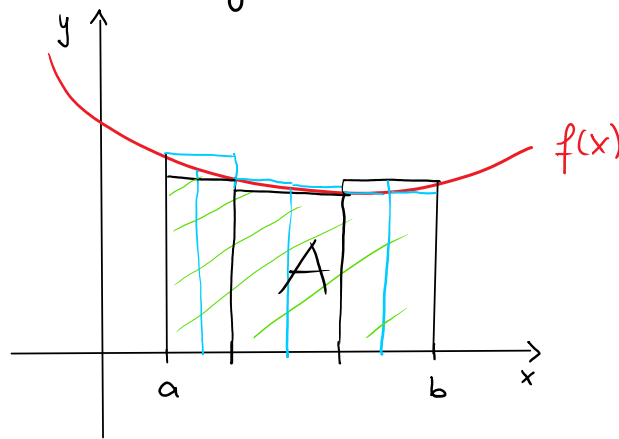
"Gegenteil von Ableiten"

$$y = f(x) \quad y' = f'(x)$$

$$y' = f'(x) \Rightarrow y = f(x)$$

1) Das bestimmte Integral

("Flächenberechnung")



$f(x)$ ist stetig auf $[a, b]$
 $f(x) \geq 0$ auf $[a, b]$

Näherungsweise berechnen: Aufteilen von $[a, b]$ in Teilintervalle,
 nicht notwendig gleich groß

Obersumme: Höhe der Teilrechtecke ist immer der größte Fkt.wert auf dem
 O_n Teilintervall

Untersumme: Höhe der Teilrechtecke ist immer der kleinste Fkt.wert auf
 U_n dem Teilintervall

Erhöhung der Verfeinerung ($n \rightarrow \infty$): Rechtecksanzahl wird größer
 Rechtecksbreite wird immer dünner

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \sum_{k=1}^n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Rechteckshöhe}}}{f(x_k)} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Rechtecksbreite}}}{\Delta x_k}$$

Der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot \Delta x_k$ heißt

von $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \dots$

das bestimmte Integral : $\int_a^b f(x) dx$

a untere Integrationsgrenze

b obere Integrationsgrenze

x Integrationsvariable

f(x) Integrand (die zu integrierende Funktion)

$\int$ "langgezogenes S, steht für Summe"

Merke : Das Integral ist ein Grenzwert

Bp: Geg. $f(x) = x$ Gesucht: $\int_a^b f(x) dx$ $F(x) = \frac{1}{2} x^2$
 $\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$

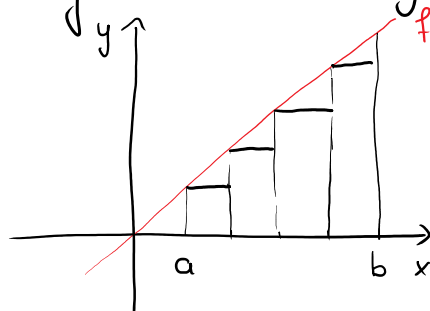
Grenzwertberechnung:

Unterteilung von $[a, b]$ $\Delta x = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$

"äquidistante" Teilintervalle

Teilungspunkte : $x_k = a + k \cdot \Delta x$ $k = 0, 1, 2, \dots, n$

Für die Grenzwertbestimmung: Untersumme



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \cdot \Delta x$$

x_{k-1} ist der Wert, für den $f(x_{k-1})$ auf dem Teilintervall den kleinsten Wert annimmt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \cdot \Delta x$$

$\downarrow f(x) = x$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_{k-1} \cdot \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \underbrace{[a + (k-1) \cdot \Delta x]}_{x_{k-1}} \cdot \Delta x$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n a \cdot \Delta x + (k-1) \cdot \Delta x^2 \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n a \cdot \Delta x + \sum_{k=1}^n (k-1) \cdot \Delta x^2 \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot a \cdot \Delta x + \Delta x^2 \sum_{k=1}^n (k-1) \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot a \cdot \Delta x + \Delta x^2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} \right) = \sum_{k=1}^{n-1} k$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\Delta x \left(n \cdot a + \Delta x \cdot \frac{n(n-1)}{2} \right) \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b-a}{n} \left(n \cdot a + \frac{b-a}{n} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \right) \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (b-a) \left(a + \frac{b-a}{2} \cdot \frac{n-1}{n} \right)$$

$$= (b-a) \left(a + \frac{b-a}{2} \right) = ab - a^2 + \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

NB:

$$\sum_{k=1}^{10} b = 10b$$

NB:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{k(k+1)}{2}$$

arithmetische Summe

NB: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

NB: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} \cdot \frac{1}{n} = 1$

$$\int_a^b x \cdot dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

Grundregeln

$$1) \int_a^a f(x) dx = 0 \quad \text{Festlegung}$$

$$2) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$3) \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx \quad a < b < c$$

$$4) \int_a^b (c \cdot f(x) + d \cdot g(x)) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx + d \cdot \int_a^b g(x) dx$$

Linearität

Sätze über integrierbare Funktionen (ohne Beweis)

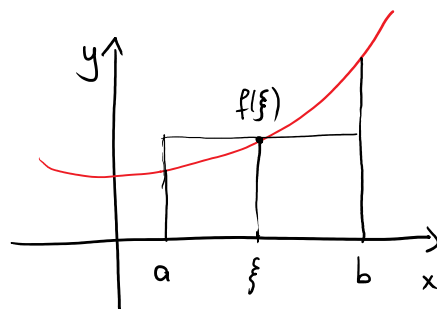
1) Jede auf $[a, b]$ stetige Fkt. ist dort integrierbar

2) Jede auf $[a, b]$ monotone (fallend oder wachsend) Fkt. ist dort integrierbar

3) Mittelwertsatz der Integralrechnung
 f stetig auf $[a, b]$

Dann ex. mindestens ein $\xi \in [a, b]$

$$\text{mit } \int_a^b f(x) dx = (b-a) \cdot \underbrace{f(\xi)}_{\substack{\uparrow \\ \text{Mittelwert der Fkt.}}}$$



Interpretation: Fläche unter Kurve
 kann durch ein Rechteck
 ersetzt werden mit
 Breite $(b-a)$ und Höhe $f(\xi)$

Das unbestimmte Integral

"Integration als Umkehrung der Differentiation"

Gesucht $F(x)$ mit $F'(x) = f(x)$

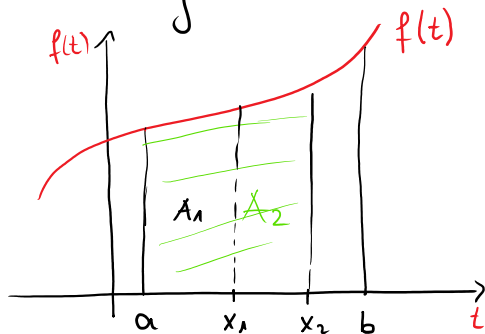
Def: geg. $f(x)$ gesucht $F(x)$

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

heißt das unbestimmte Integral von $f(x)$

$$(F(x) + C)' = f(x)$$

Zusammenhang zwischen dem bestimmten und dem unbestimmten Integral



$$A = \int_a^b f(t) dt$$

nun: obere Integrationsgrenze wird "variabel"

$$A_1 = \int_a^{x_1} f(t) dt \quad A_2 = \int_a^{x_2} f(t) dt$$

Flächeninhalt als Funktion der oberen Integrationsgrenze

Def: $I : x \mapsto I(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b]$

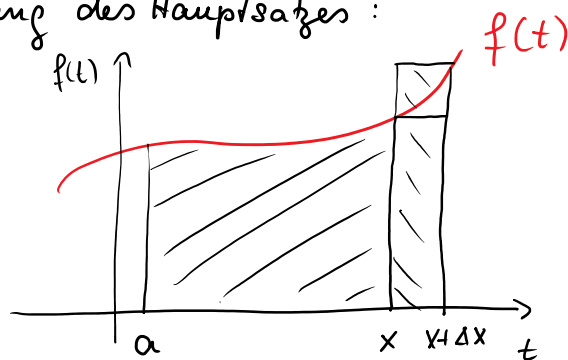
heißt Integralfunktion oder auch das unbestimmte Integral

Bem: Die Differenz zweier Integralfunktionen ist eine Konstante

$$I_1 : x \mapsto \int_{c_1}^x f(t) dt \quad I_2 : x \mapsto \int_{c_2}^x f(t) dt$$

$$I_1 - I_2 = \int_{c_1}^{c_2} f(t) dt \quad (\text{Eigenschaften des best. Integrals})$$

Herleitung des Hauptsatzes:



$$I(x) = \int_a^x f(t) dt$$

$$\Delta I = I(x + \Delta x) - I(x)$$

Zuwachs liegt zwischen $f(x + \Delta x) \cdot \Delta x$ und $f(x) \cdot \Delta x$
 "große Rechtecke" "kleine Rechtecke"

$$f(x) \cdot \Delta x \leq \Delta I \leq f(x + \Delta x) \cdot \Delta x \quad | : \Delta x$$

$$f(x) \leq \frac{\Delta I}{\Delta x} \leq f(x + \Delta x)$$

$$\Delta x \rightarrow 0 \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x) \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta x} \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x)$$

$$f(x) \leq I'(x) \leq f(x)$$

$$f(x) = I'(x)$$

Die erste Ableitung eines unbestimmten Integrals ist der Integrand
 $I(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Jedes unbestimmte Integral $I(x) = \int_a^x f(t) dt$ ist
 eine Stammfunktion zu f und es gilt: $I'(x) = f(x)$

Differenzieren und Integrieren sind inverse Rechenoperationen

Folgerung aus diesem Satz:

$$I(x) = \int_a^x f(t) dt = F(x) + C \quad (*) \quad F'(x) = f(x)$$

$$I(a) = \int_a^a f(t) dt = F(a) + C = F(a) \Rightarrow C = F(a) - F(a) = 0$$

$$\text{Aus } \int_a^a f(t) dt = 0 = F(a) + C = 0 \Rightarrow C = -F(a)$$

$$\text{Also } (*) : I(x) = F(x) - F(a)$$

$$\text{Setze } x = b : \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

Schema Berechnung best. Integral

1) Aufsuchen einer Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$

2) Berechnung $F(b) - F(a)$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = \left[F(x) \right]_a^b$$

Frage: Wie findet man Stammfunktionen?

Antwort: Zunächst aus bereits bekannten Ableitungen

$$\text{Bp: } \int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

etc.