

Vorlesung 25.1.2023

(letzte Vorlesung im WS 22/23)

Integralrechnung Wdh

Nun: Aufsuchen von Stammfunktionen

1) aus bekannten Ableitungen

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, \quad C \in \mathbb{R} \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

1. Regel : Summenregel

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

2. Regel : Partielle Integration - Produktintegration

Aus Differentialrechnung : Produktregel

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\Leftrightarrow f(x) \cdot g'(x) = (f(x) \cdot g(x))' - f'(x) \cdot g(x)$$

$\Rightarrow$
Integration
auf beiden Seiten

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = \int (f(x) \cdot g(x))' dx - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

Integration eines Produktes : $f(x) \cdot g'(x)$: Produktintegration
Es bleibt ein Integral auf der rechten Seite stehen : Partielle Integration

Bp : $\int x \cdot e^x dx$

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^x \\ g(x) &= e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ f'(x) &= 1 \end{aligned}$$

$$\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x \cdot e^x - e^x = e^x(x-1) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^1 x \cdot e^x dx = \left[e^x(x-1) \right]_0^1 = e^1(1-1) - e^0(0-1)$$

$$\int_0^1 x \cdot e^x dx = \left[\boxed{e^x(x-1)} \right]_0^1 = e^1(1-1) - e^0(0-1) = 0 - (1 \cdot -1) = 1$$

$$\text{II} \quad \int x^2 \cdot e^x dx \quad \begin{array}{ll} g'(x) = e^x & f(x) = x^2 \\ g(x) = e^x & f'(x) = 2x \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int x^2 \cdot e^x dx &= x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x dx \\ &= x^2 \cdot e^x - 2 \int \boxed{x \cdot e^x dx} \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{mit I}}{=} x^2 \cdot e^x - 2e^x(x-1) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

2 mal die
Regel der
partiellen
Integration
anwenden!

$$\begin{aligned} \text{III} \quad \int x \cdot \sin(x) dx & \quad \begin{array}{ll} f(x) = x & g'(x) = \sin(x) \\ f'(x) = 1 & g(x) = -\cos(x) \end{array} \quad \int f(x) \cdot g'(x) dx \\ & \quad \quad \quad = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx \\ &= x \cdot -\cos(x) - \int 1 \cdot (-\cos(x)) dx \\ &= -x \cdot \cos(x) + \int \cos(x) dx = -x \cdot \cos(x) + \sin(x) + C \\ & \quad \quad \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{IV} \quad \int \ln(x) dx &= \int 1 \cdot \ln(x) dx \quad \begin{array}{ll} f(x) = \ln(x) & g'(x) = 1 \\ f'(x) = \frac{1}{x} & g(x) = x \end{array} \\ &= \ln(x) \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = \ln(x) \cdot x - \int 1 dx \\ &= \ln(x) \cdot x - x \\ &= x(\ln(x) - 1) + C, \quad C \in \mathbb{R} \\ & \quad \quad \quad x > 0 \end{aligned}$$

Fazit: Es kommt auf die richtige
Wahl von $f(x)$ und $g'(x)$ an!

3. Regel : Integration durch Substitution

Erinnerung: $y = f(g(x))$

$$y' = \underbrace{f'(g(x))}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{innere Ableitung}}$$

Kettenregel

Herleitung für die Regel mit einem Beispiel

$$\int (\sqrt{x^2+2} \cdot 2x) dx$$

Substitution $z = x^2 + 2$

$$\Rightarrow z' = \frac{dz}{dx} = 2x$$

$$\Rightarrow dz = 2x \cdot dx$$

$$\int \sqrt{z} dz = \int z^{\frac{1}{2}} dz = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} z^{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3} \cdot z^{\frac{3}{2}}$$

Rücksubstitution: $\int (\sqrt{x^2+2} \cdot 2x) dx$

$$= \frac{2}{3} (x^2+2)^{\frac{3}{2}} + C, C \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{(x^2+2)^3}$$

NB: $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ $n \neq -1$

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)'$$

$$= \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Substitutionsregel: $\int (f(x) \cdot g'(x)) dx = f(z) dz$

Bp: 1) $\int x \cdot e^{-x^2} dx$ $z = -x^2$ $z' = \frac{dz}{dx} = -2x$

$$dx = \frac{dz}{-2x}$$

$$= -\frac{1}{2} \int e^z dz$$

$$= -\frac{1}{2} e^z - \frac{1}{2} e^{-x^2} + C, C \in \mathbb{R}$$

Rück-Subst.

2) $\int \frac{1}{2x+3} dx$ $z = 2x+3$ $\frac{dz}{dx} = z' = 2$

$$dz = 2 dx$$

$$dx = \frac{1}{2} dz$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{z} dz$$

Rücksubst.

$$= \frac{1}{2} \ln|z| = \frac{1}{2} \ln|2x+3| + C, C \in \mathbb{R}$$

3) (Selbststudium) $\int \tan(x) dx$ Tipp: $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Ergebnis: $-\ln|\cos(x)| + C$ $C \in \mathbb{R}$
 $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Bem.: Falls ein bestimmtes Integral berechnet werden soll, dann müssen die Grenzen mit substituiert werden

$$\int_2^3 x \cdot e^{-x^2} dx \quad z = -x^2 \quad \int_{-4}^{-9} e^z dz = \dots = \left[-\frac{1}{2} e^z \right]_{-4}^{-9}$$

Weitere Integrationsmethoden

Partialbruchzerlegung bei gebrochen rationalen Funktionen

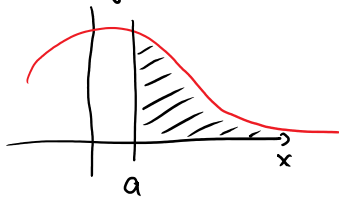
weitere numerische Verfahren, falls keine der Regeln anwendbar:

Rechtecksapproximation

Trapezregel

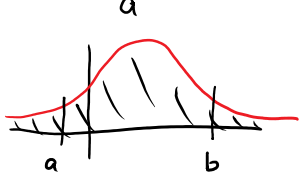
Simpson-Regel

Uneigentliche Integrale



$$\int_a^{\infty} f(x) dx$$

$$\text{ebenso } \int_{-\infty}^a f(x) dx$$



$$\int_{-\infty}^b f(x) dx$$

uneigentliche Integrale
 Falls $\lim_{b_n \rightarrow \infty} \int_a^{b_n} f(x) dx$ ex.

Bp: 1) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4} dx$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^4} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{-3}}{-3} \right]_1^b$$

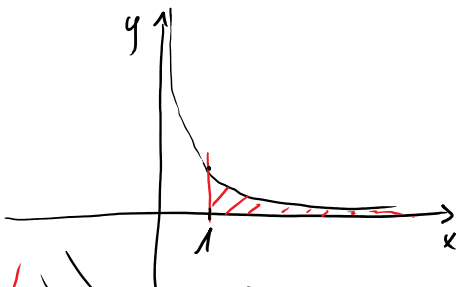
$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{b^{-3}}{-3} - \frac{1^{-3}}{-3} \right)$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3b^3} + \frac{1}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$f(x) = x^{-4}$$

$$F(x) = -\frac{1}{3}x^{-3}$$



2) $\int_1^{\infty} x^2 dx$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{b^3}{3} - \frac{1}{3} \right)$$

Das uneigtl. Integral ex. nicht.

Grenzwert ∞

Anwendungsgebiete der Integralrechnung

1) Flächeninhalt $f(x) \geq 0$ auf $[a, b]$

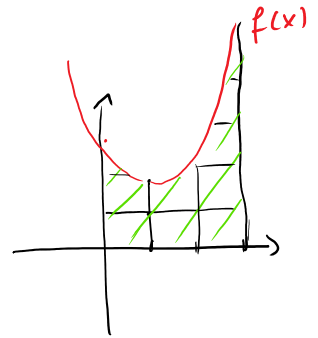
Bp: $\int_0^3 (x^2 - 2x + 3) dx$

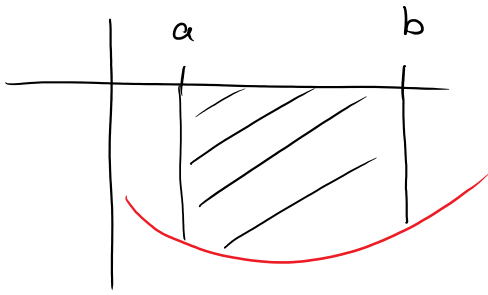
$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x \right]_0^3$$

$$= \frac{27}{3} - 9 + 9 - 0 = \frac{27}{3} \text{ FE}$$

$$= 9 \text{ FE}$$

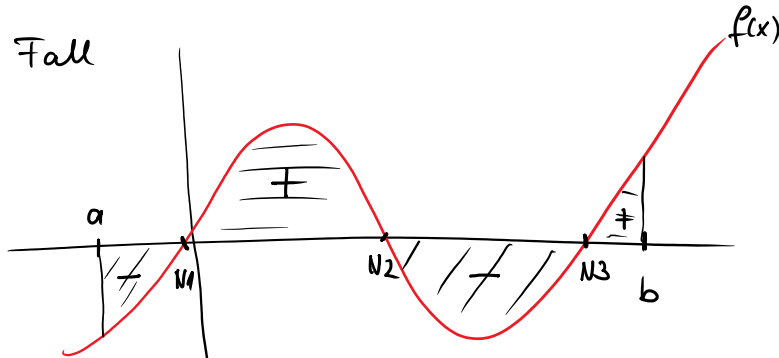
$f(x) \leq 0$ auf $[a, b]$





$$A = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

Folgender Fall



$\int_a^b f(x) dx$
muss aufgeteilt werden

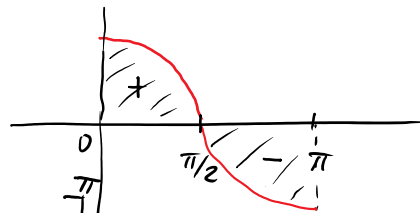
$$\int_a^b f(x) dx = \left| \int_a^{N1} f(x) dx \right| + \left| \int_{N1}^{N2} f(x) dx \right| + \left| \int_{N2}^{N3} f(x) dx \right| + \left| \int_{N3}^b f(x) dx \right|$$

Bp: $\int_0^{\pi} \cos(x) dx$

$$= \left[\sin(x) \right]_0^{\pi/2} + \left[\sin(x) \right]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= \left| \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) \right| + \left| \sin(\pi) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right|$$

$$= |1 - 0| + |0 - 1| = 1 + 1 = 2$$



andern:

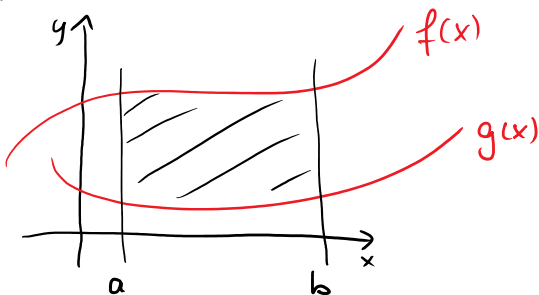
$$\int_0^{\pi} \cos(x) dx$$

$$= \left[\sin(x) \right]_0^{\pi}$$

$$= \sin(\pi) - \sin(0)$$

$$= 0 - 0 = 0$$

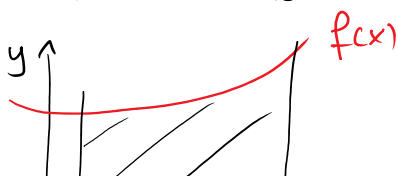
Flächeninhalt zwischen zwei Kurven



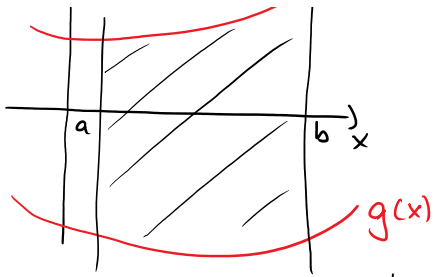
$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

$$= \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

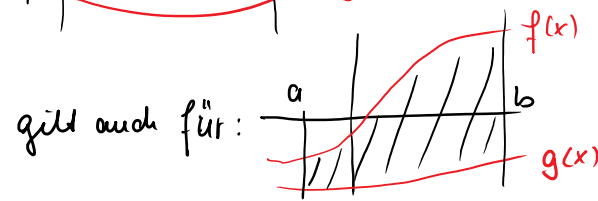
für $f(x) \geq g(x)$
auf $[a, b]$



$$A = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

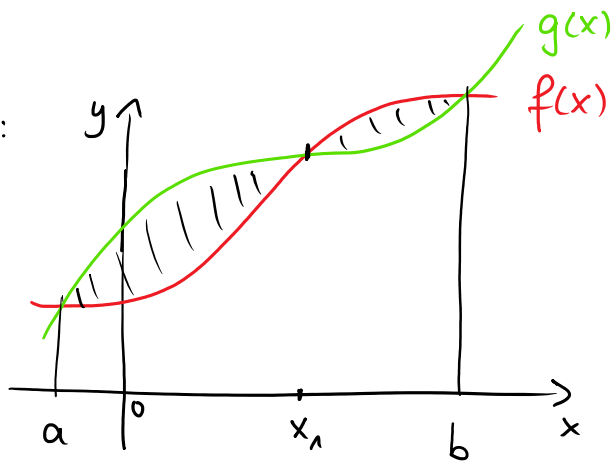


$$A = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$



bitte nochmals reflektieren!

Achtung:



$$f(x) \geq g(x) \text{ auf } [x_1, b]$$

$$g(x) \geq f(x) \text{ auf } [a, x_1]$$

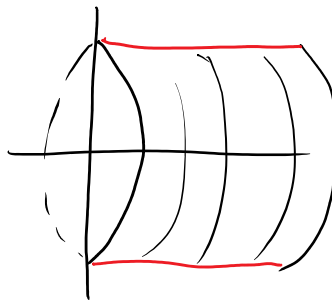
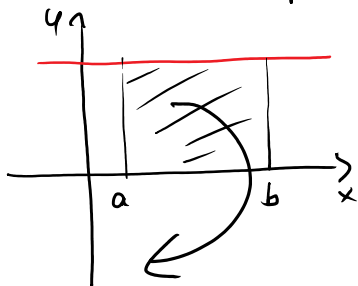
$$A = \left| \int_a^{x_1} (f(x) - g(x)) dx \right| + \left| \int_{x_1}^b (f(x) - g(x)) dx \right|$$

Daher: immer Skizze anfertigen

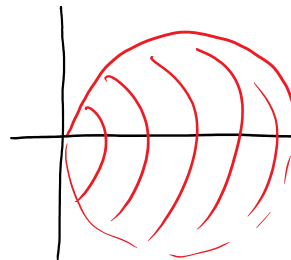
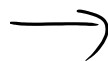
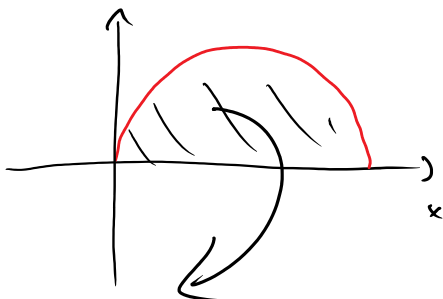
ÜA: Berechnen Sie die Fläche, die von $y_1 = x^2 - 4x + 5$ und $y_2 = x + 1$ eingeschlossen wird

$$\text{Erg: } \frac{27}{6} \text{ FE}$$

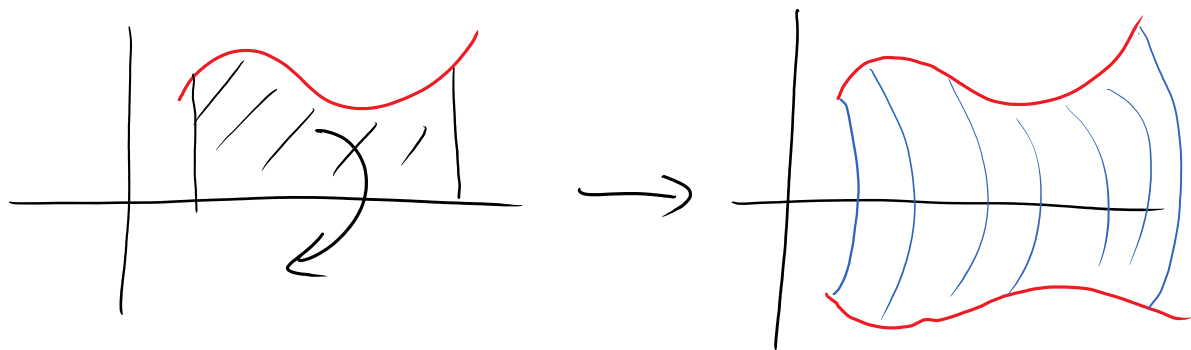
Rotationskörper



Zylinder

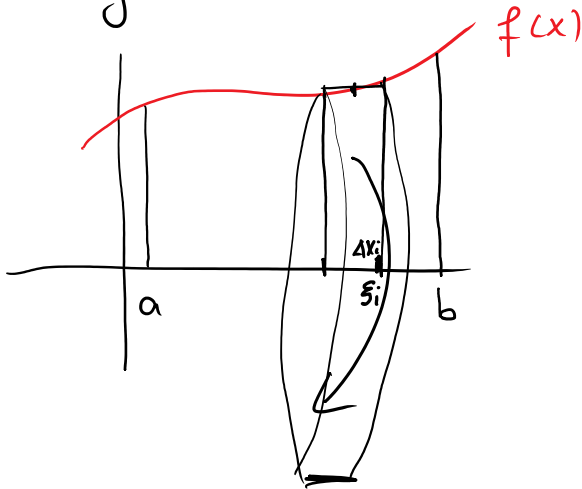


Kugel



Art "Vase"

Berechnung des Rotationsvolumens:



dünne Zylinderscheibe bei Rotation

$$\text{mit } \Delta V_i = \pi \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Höhe der} \\ \text{Zylinderscheibe}}}{f(\xi_i)}^2 \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Radius}}}{\Delta x_i}$$

$$V = \sum_{i=1}^n \Delta V_i = \sum_{i=1}^n \pi \cdot f(\xi_i)^2 \cdot \Delta x_i$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{\Delta x_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \pi \sum_{i=1}^n [f(\xi_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \cdot dx$$

Drehung um die x-Achse

Aufgabe: $y = \sin(x)$ rotiere auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ um die x -Achse

$V = ?$

$$V = \pi \int_0^{\pi/2} [\sin(x)]^2 dx$$

$\downarrow$
 $\frac{\pi^2}{4} VE$