Bereiten Sie die Aufgaben parallel zur Vorlesung so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen in der jeweiligen Übung vorzutragen. Bis zum Vorabend der Übung können Sie Lösungsentwürfe mit Ihrer Matrikelnummer mir mailen (ane.schmitter@th-koeln.de)

Übungsblatt 5 : Lineare Algebra

Aufgabe 5.1 Rechnen in Vektorräumen

Gegeben sind die folgenden Vektoren:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Komponenten von

$$\vec{u} - \vec{v}, \qquad 4\vec{u} + 4\vec{w}, \qquad -4\vec{v} + 2\vec{u}, \qquad (7\vec{u} - 4\vec{w}) - (8\vec{w} + 3\vec{v})$$

b) Bestimmen Sie den Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ mit $3\vec{u} - \vec{v} + \vec{x} = 8\vec{x} + \vec{w}$

Aufgabe 5.2 Skalarprodukt

Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad \vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie

a) $2\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{x}}$ (b) $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} + 4\vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{x}$

Aufgabe 5.3 Vektoren – lineare Unabhängigkeit

Gegeben seien die Vektoren – prüfen Sie jeweils auf lineare Unabhängigkeit

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$

c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bereiten Sie die Aufgaben parallel zur Vorlesung so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen in der jeweiligen Übung vorzutragen. Bis zum Vorabend der Übung können Sie Lösungsentwürfe mit Ihrer Matrikelnummer mir mailen (ane.schmitter@th-koeln.de)

Aufgabe 5.4 Basiswechsel

Machen Sie sich noch einmal klar, was eine **Basis** eines n-dimensionalen Vektorraums ist. So ist zum Beispiel für n=3 jede Menge von drei linear unabhängigen Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Jeder andere Vektor lässt sich aus diesen Basisvektoren **linear kombinieren**. Falls es sich bei den Basisvektoren um die Einheitsvektoren handelt, sind die Koordinaten des Vektors genau die Linearfaktoren aus der Linearkombination. Wenn nun eine andere Basis gegeben ist (also nicht die Einheitsvektoren), so kann man bezüglich dieser anderen Basis ebenso die Linearfaktoren der Linearkombination als die Koordinaten des Vektors **bezüglich dieser Basis** nehmen. Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ bezüglich der } \quad \text{Basis } \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5.5 Betrag von Vektoren

a) Bestimmen Sie die Länge folgender Vektoren:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 4 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2a \\ -a \\ 2a \end{pmatrix} \quad mit \quad a \neq 0$$

b) Bestimmen Sie die Länge folgender Vektoren, liegt der längste Vektor in $\mathbf{R}^2$ oder in $\mathbf{R}^3$?

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.6 Orthogonalität

Prüfen Sie nach, ob folgende Vektoren orthogonal zueinander sind:

$$a) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad b) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c) Bestimmen Sie x so, dass die beiden folgenden Vektoren zueinander orthogonal sind:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ x \\ 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.7 Winkel zwischen Vektoren

Bestimmen Sie den Winkel, den die beiden folgenden Vektoren einschließen:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ -12 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -21 \\ -28 \end{pmatrix}$$

Bereiten Sie die Aufgaben parallel zur Vorlesung so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen in der jeweiligen Übung vorzutragen. Bis zum Vorabend der Übung können Sie Lösungsentwürfe mit Ihrer Matrikelnummer mir mailen (ane.schmitter@th-koeln.de)

Aufgabe 5.8 Matrizenmultiplikation

Gegeben sind die folgenden Matrizen: A sei eine mxn-Matrix, B eine nxr-Matrix (m,n,r natürliche Zahlen)

Für welche m,n,r ist das Ergebnis der Multiplikation AB ein Skalar, für welche ein Zeilenvektor, für welche ein Spaltenvektor
und für welche eine Matrix mit einer Zeilenzahl und Spaltenzahl größer als 1?

Aufgabe 5.9 Matrizenmultiplikation

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & a \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4b \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Welche Produkte der Matrizenmultiplikation von zwei Matrizen sind definiert? Führen Sie dann die Multiplikation durch.

Aufgabe 5.10 Matrizenmultiplikation

Es seien $A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$

Berechnen Sie AB und BA. Für welche Winkel sind die Produkte gleich?

Aufgabe 5.11 Matrizenmultiplikation

Es seien $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix}$

Prüfen Sie anhand dieser Matrizen das Distributivgesetz **A(B+C) = AB + AC** für die Matrizenmultiplikation nach.
Berechnen Sie dazu beide Seiten getrennt und vergleichen Sie die Resultate.

Aufgabe 5.12 Anwendungsbeispiele

a) Eine Firma verarbeite die Rohstoffe R1, R2, R3, R4 für Bauteile B1,B2 und B3. Die Anzahl der verarbeiteten Rohstoffe und Bauteile pro Endprodukt sind zwei Tabellen dargestellt.

	E1	E2
B1	30	50
B2	10	6
B3	20	18

	B1	B2	B3
R1	160	120	150
R2	6	4	2
R3	0	70	40
R4	80	40	70

Berechnen Sie die Tabelle, die übersichtlich den benötigten Rohstoffbedarf für je ein Endprodukt E1 und E2 darstellt.

b) Eine Firma verarbeite die Rohstoffe R1, R2, R3. Der wöchentliche Verbrauch der Rohstoffe während eines Monats ist folgender Tabelle zu entnehmen:

Woche/Rohstoff	R1	R2	R3
1.Woche	8	4	12
2.Woche	10	6	5
3.Woche	7	8	5
4.Woche	11	7	9

Diese Rohstoffe sollen einem von zwei Lieferanten L1, L2 bezogen werden, wobei die Rohstoffpreise in folgender Tabelle angegeben sind (in virtuellen Geldeinheiten pro Mengeneinheit)

Rohstoff/Lieferant	L1	L2
R1	8	4
R2	10	6
R3	7	8

Vergleichen Sie die Rohstoffkosten für alle vier Wochen und entscheiden Sie, bei welchem Lieferanten die Firma bestellen soll

Aufgabe 5.13 Inverse Matrix

a) Gegeben ist die Matrix A, bestimmen Sie die Inverse A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Gibt es zwei 2x2-Matrizen A und B, die beide nicht die Nullmatrix sind, deren Produkt aber die Nullmatrix ergibt.

Aufgabe 5.14 Inverse Matrix

Sind folgende Matrizen zueinander invers?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.15 Transponierte Matrix

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}$ Bestimmen Sie x und y so, dass A'A=2E gilt.

(A' ist die Transponierte von A, E ist die Einheitsmatrix)

Aufgabe 5.16 Rangbestimmung einer Matrix

Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen:

Bereiten Sie die Aufgaben parallel zur Vorlesung so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen in der jeweiligen Übung vorzutragen. Bis zum Vorabend der Übung können Sie Lösungsentwürfe mit Ihrer Matrikelnummer mir mailen (ane.schmitter@th-koeln.de)

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 9 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.17 Lineare Gleichungssysteme

Die folgenden linearen Gleichungssysteme besitzen eine eindeutige Lösung. Bestimmen Sie diese durch Anwendung des ***Gauß'schen Lösungsalgorithmus*** wie in der Vorlesung besprochen, d.h. Sie berechnen die Lösung durch Übergang zur erweiterten Koeffizientenmatrix.

a)
$$\begin{aligned} x_1+3x_2-2x_3&=-1 \\ 2x_1-x_2+2x_3&=3 \\ 3x_1+2x_2-5x_3&=0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1+4x_2-2x_3-2x_4&=-7 \\ -2x_1+x_2+3x_3+x_4&=14 \\ x_1+2x_2+2x_3-x_4&=5 \\ 2x_1-2x_2-x_3-x_4&=-9 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 3x_1+2x_2+2x_3&=-1 \\ x_1+6x_2-x_3&=3 \\ 4x_1+x_2+5x_3&=-6 \end{aligned}$$

Aufgabe 5.18 Lineare Gleichungssysteme - Steckbriefaufgaben

a) Berechnen Sie unter Verwendung des ***Gauß'schen Lösungsalgorithmus*** die Gleichung der ***Parabel 2. Ordnung***

$$y = ax^2+bx+c$$

die durch die Punkte A(-1;1) , B(3;-1) und C(5;7) verläuft.

b) Der Graph einer ganzrationalen Funktion 4. Grades ist bezüglich der y-Achse symmetrisch. Er geht durch den Punkt A (4;-3) und hat in B (2;0) einen Wendepunkt. Berechnen Sie unter Verwendung des Gauß'schen LA die Gleichung dieser ganzrationalen Funktion.

c) Der Graph einer ganzrationalen Funktion 5. Grades ist symmetrisch zum Ursprung, hat in P (-1;1) einen Wendepunkt mit Steigung 3. Berechnen Sie unter Verwendung des Gauß'schen LA die Gleichung dieser ganzrationalen Funktion.

Aufgabe 5.19 Lösbarkeit von Linearen Gleichungssystemen

Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ -2\lambda x_1 & + & \lambda x_2 & + & 9x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & \lambda x_3 & = & 1 \end{array}$$

a) Für welche $\lambda \in R$ ist dieses Gleichungssystem eindeutig lösbar?

b) Für welche $\lambda \in R$ existieren keine Lösungen?

Aufgabe 5.20 Determinanten

a) Berechnen Sie folgende Determinanten nach der Regel von Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & 8 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

b) Berechnen Sie folgende Determinanten (Tipp: bei Bedarf erst geschickt umformen):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & c+1 \end{vmatrix}$$

c) Berechnen Sie die folgende Determinante, nehmen Sie dazu zunächst einige geschickte Umformungen vor:

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 5 & -1 & 2 & -1 \\ 7 & -1 & 3 & -2 & 3 \\ -9 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

d) Berechnen Sie die Menge der $t \in \mathbb{R}$, für die folgende Determinante den Wert Null annimmt:

$$\begin{vmatrix} 2-t & 1 & -1 \\ 1 & 1-t & 0 \\ -1 & 0 & 1-t \end{vmatrix}$$