Fachprüfung AI / TI / MI **Mathematik 1 + 2 – Probeklausur 12h**
Prof. Dr. Wolfgang Konen – FH Köln, Institut für Informatik
25.09.2008

Aufgaben 1-4 sind die Mathe 1 Klausur (60 min)
Aufgaben 5-8 sind die Mathe 2 Klausur (60 min)

Name:_________________ Vorname: ___________________

Matr.-Nr.:______________ Unterschrift:__________________

Klausurdauer: 2 x 60 min.

Hilfsmittel: Formelsammlung Mathematik
Rezepte Mathe 1+2
nicht-grafikfähiger Taschenrechner

Hinweise:

1. Benutzen Sie keinen Bleistift und keinen roten Stift. Heftung nicht lösen. Keine losen Blätter erlaubt.
2. Nebenrechnungen gehören in die Klausur - Schmierpapier ist nicht erlaubt.
3. Ungültige oder falsche Lösungswege durchstreichen. Der Lösungsweg muß nachvollziehbar sein.
4. Lesen Sie bitte zunächst die Aufgabenstellungen komplett durch und prüfen Sie auf Vollständigkeit und Verständlichkeit der Aufgaben!
5. Tragen Sie bitte auf diesem Deckblatt Name, Vorname, Matr.-Nr. und Unterschrift ein!

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg!

Aufgaben		max. Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	Grenzwert + Def.bereiche	12	
2	Ebenen	11	
3	Taylor	14	
4	Lineare Algebra	13	
5	Fkt. mehrere Var.	13	
6	Baum + Präfixcode	14	
7	Kombinatorik	12	
8	Differentialgleichung	11	
Punktzahl Gesamt:		**100**	

Aufgabe 1 Grenzwert + Definitionsbereiche

(a) Für welche $x \in \mathbf{R}$ ist $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x-1|}} - \dfrac{\sqrt{x(x-1)}}{x^2-4}$ definiert?

(b) Für welche $x \in \mathbf{R}$ ist $g(x) = \ln(\sin(x))$ definiert?

Berechnen Sie den Grenzwert oder begründen Sie, warum ein solcher nicht existiert:

(c) (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \begin{cases} \dfrac{3n}{n+1} - \dfrac{n}{1-n} & \text{für} \quad n \text{ gerade} \\ \dfrac{12n^2 + 2\sin(n)}{(3n+2)(n-1)} & \text{für} \quad n \text{ ungerade} \end{cases}$

(d) Wie lautete die Antwort bei (c), wenn man 12 durch 21 ersetzt?

Aufgabe 2 Ebenen

Seien $E_1 = \{\vec{x} \mid \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\right) = 0\}$ und $E_2 = \{\vec{x} \mid \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}\right) = 0\}$ zwei Ebenen.

(a) Rechnen Sie für E_1 die Hesse-Form $E_1 = \{\vec{x} \mid \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0\}$ in die {**r**,**s**}-Form um:
$E_1 = \{\vec{x} \mid \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{r} + \mu\vec{s} \quad \forall \lambda, \mu \in \Re\}$.

(b) Welche Schnittgerade g haben E_1 und E_2?

(c) Zeigen Sie als Probe, dass jeder Punkt der Geraden g die Ebenengleichungen E_1 und E_2 erfüllt.

Aufgabe 3 Taylor

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T(x)$ zum Grad 3 von $f(x) = \sin(x\pi) + \ln(x^3)$ an der Stelle $x_0 = 1$.

(b) Bestimmen Sie das Restglied im Intervall $[0.8,\ 1.2]$ für das Taylorpolynom $T(x)$ aus (a) und geben Sie damit eine für jedes x aus diesem Intervall gültige Fehlerabschätzung an. Sie können dabei voraussetzen, dass $f^{(4)}(x)$ in diesem Intervall monoton fallend ist.

Aufgabe 4 Lineare Algebra

Gegeben sei das Gleichungssystem $\begin{cases} x_1 - 10x_2 + (1+\lambda)x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ x_1 - 6x_2 + \lambda x_3 = 1 \end{cases}$

(a) Für welches $\lambda \in \mathbf{R}$ hat das Gleichungssystem **keine eindeutige** Lösung? Begründung!

(b) Lösen Sie das Gleichungssystem für $\lambda = -3$ mit dem **Gauß'schen Eliminationsverfahren** und geben Sie die Lösungsmenge an.

(c) Gibt es unter den Lösungen zu (b) eine solche mit $x_3 = 1$? Wenn ja, diese bitte angeben.

Aufgabe 5 Funktion mehrerer Veränderlicher

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = x^2 - \int_1^y e^{\sin(t)\cdot\sin(t)}dt$$

Berechnen Sie durch **Linearisierung** der Funktion um einen <u>geeignet gewählten</u> (!) Entwicklungspunkt näherungsweise die Funktionswerte von f(x,y) für die Tabelle

f(x,y)		y 0.9	y 1.0	y 1.1
x	0.9			
x	1.0			
x	1.1			

Aufgabe 6 Baum und Präfixcode

(a) Definieren Sie den Begriff **Präfixcode**.

(b) Gegeben sei der Code
a=11, b=1010, c=1011, d=1000, e=01, f=001, g=000, x=1101, z=1001
Zeichnen Sie den Binärbaum dieses Codes und geben Sie <u>ALLE</u> Buchstabenpaare an, die die Bedingungen eines Präfixcodes verletzen.

(c) Konstruieren Sie einen Huffman-Code für das Alphabet {a,b,c,d,e,f,g,h} mit der Häufigkeitsverteilung

	a	b	c	d	e	f	g	h	Summe
Häufigkeit in %	20	10	7	14	30	4	9	6	100

Notieren Sie für jeden Buchstaben, ob sein Codewort aus 2, 3, 4 oder mehr Ziffern besteht.

Aufgabe 7 Kombinatorik + Erwartungswert

Für die Prüfungsanmeldung PSSO wird ein neuer Passwortzugang mit Passwörtern der Länge 5 eingerichtet.

(a) Wieviele gültige Passwörter gibt es, wenn nur Ziffern von 0 bis 9 Verwendung finden?
(b) Wieviele gültige Passwörter gibt es, wenn jede Ziffer höchstens einmal vorkommen darf?
(c) Wie wahrscheinlich ist es bei (a) und bei (b), dass ein zufällig herausgegriffenes Passwort mit „12“ beginnt?

Bei einer Quizshow sind Sie Kandidat und erhalten von der Showmasterin zwei verschlossene Umschläge: „In jedem Umschlag ist ein Scheck, der eine enthält eine doppelt so hohe Summe wie der andere.“ Sie öffnen einen Umschlag und dürfen dann wählen, ob Sie den Scheck behalten, oder ob Sie zum anderen Umschlag wechseln.

(d) Ist es besser zu wechseln oder bei der ersten Wahl zu bleiben? Begründen Sie Ihre Entscheidung, indem Sie für beide Fälle die Erwartungswerte ausrechnen.

Aufgabe 8 Differentialgleichung

Gegeben sei die inhomogene DGL

$$y'(x) + y(x) = 6x$$

(a) Typisieren Sie die DGL (Ordnung, explizit/implizit, linear, mit/ohne konstante Koeffizienten), jeweils mit einem Begründungssatz.

(b) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL und damit die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL.