

Übungsblatt 6 Integralrechnung + Wdh.

Aufgabe 6.1 Wiederholung (klausur-artige Aufgaben)

- a) Bestimmen Sie die Lösungen: $\sqrt{2x + 12} - x = 2$
- b) Berechnen Sie annähernd $\frac{1}{\sqrt{e}}$ (e ist die **Eulersche Zahl**) indem Sie die Funktion $f(x) = e^x$ an der Stelle $x_0 = 0$ in ein **Taylorpolynom 6. Grades** entwickeln! Welchen Wert müssen Sie für x in das Taylorpolynom einsetzen? Wie genau ist diese Annäherung? Schätzen Sie die Genauigkeit der Annäherung (den Fehler) mit der **Restgliedformel von Lagrange** ab! (Begründen Sie, warum C=1 die beste mögliche Abschätzung ist).

Aufgabe 6.2 Integrale und Stammfunktionen

Bestimmen Sie die nachfolgenden bestimmten Integrale sowie ihre Stammfunktionen!

(a) $\int_0^1 \sqrt{x} dx$

(b) $\int_{-1}^1 x dx$

(c) $\int_{-1}^1 x^2 dx$

- (d) Fällt Ihnen bei (b) und (c) etwas auf? Kann man das verallgemeinern? Verwenden Sie

diese Erkenntnis, um möglichst einfach $\int_{-23}^{23} f(x) dx$ zu berechnen, wobei entweder

$f(x)=\sin(x)$ oder $f(x)=\cos(x)$ gilt.

Aufgabe 6.3 Substitutionsregel

(a) $\int \cos(\pi - 2x) dx$

(b) $\int_0^2 \sqrt[3]{\left(\frac{x}{4} - 2\right)^2} dx$

(c) $\int x(x^2 + 3)^4 dx$

(d) $\int_0^1 \sin(x) e^{\cos(x)} dx$

Aufgabe 6.4 Partielle Integration

(a) $\int x e^x dx$

(b) $\int \ln(x) dx$

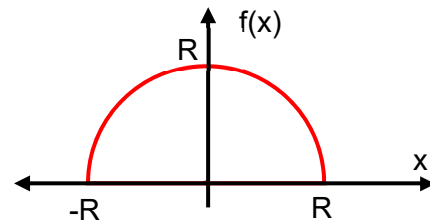
(c) $\int \frac{\ln(x)}{x^2} dx$

[Hinweis zu (b): Schreiben Sie $\ln(x)$ als Produkt $1 \cdot \ln(x)$.]

Bereiten Sie die Aufgaben für den 22.04.2024 so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

Aufgabe 6.5 Kugelvolumen

- (a) Welche Funktion $f(x)$ beschreibt den nebenstehend gezeichneten Halbkreis?
- (b) Berechnen Sie das Volumen einer Kugel mit Radius R , indem Sie den Halbkreis um die x -Achse rotieren lassen. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Formelsammlung!



Aufgabe 6.6 Uneigentliche Integrale

Welche der folgenden uneigentlichen Integrale sind konvergent? Was ist im Falle der Konvergenz ihr Grenzwert?

(a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2+1}$

(b) $\int_1^{\infty} \frac{x+1}{x^2} dx$

[Hinweis: Die Ableitung von $\arctan(z)$ ist $\frac{1}{z^2+1}$]

(c) $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$

(d) $\int_0^{\infty} (3e^{-2x} - e^{-x}) dx$

Aufgabe 6.7 Integrale (klausur-ähnlich)

Berechnen Sie mit Hilfe einer geeigneten Integrationsmethode:

a. $\int_0^{\pi/2} e^{\sin x} \cdot \cos x dx$

b. $\int \left(\sin(x) - \frac{x}{x^2+1} + x^3 \right) dx$

c. $\int_a^x (\sin(t))^5 \cos(t) dt$

Aufgabe 6.8 Rotationskörper

Gegeben ist $f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{4-x}$

Die Fläche, die der Funktionsgraph zwischen seinen beiden Nullstellen mit der x -Achse einschließt, rotiere um die x -Achse. Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Körpers.

Bereiten Sie die Aufgaben für den 22.04.2024 so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

Aufgabe 6.9 Wiederholung (Klausuraufgaben)

- c) Zeichnen Sie zwei Venn-Diagramme der Mengen A, B, C und schraffieren Sie darin die Mengen (i) $A \setminus (B \cap C)$ und (ii) $B \cup (A \setminus (B \cup C))$
- d) Vereinfachen Sie mit den Regeln der Aussagenlogik: $\overline{(C \vee \overline{D})} \vee D$
- e) Berechnen Sie annähernd \sqrt{e} (e ist die **Eulersche Zahl**), indem Sie die Funktion $f(x) = e^x$ an der Stelle $x_0 = 0$ in ein **Taylorpolynom 6. Grades** entwickeln! Welchen Wert müssen Sie für x in das Taylorpolynom einsetzen? Wie genau ist diese Annäherung? Schätzen Sie die Genauigkeit der Annäherung (den Fehler) mit der **Restgliedformel von Lagrange** ab!
(Hinweis: Verwenden Sie bei der Abschätzung $C=2$.
Können Sie begründen, warum 2 ein gültiger Wert ist?)