

Übungsblatt 7 Statistik

Aufgabe 7.1 Beschreibende Statistik

Gegeben sei die folgende Stichprobe von Messwerten z

z	0.1	0.15	0.2	0.2	0.25	0.3	0.31	0.35
	0.7	1.0	1.0	1.1	1.5	2.5	2.5	2.7
	2.8	2.95	3.1	3.1	3.15	3.15	3.2	4.0
	4.2	5.2	7.5	10.5	10.7	20.0	25.5	31.5

- (a) Berechnen Sie Mittelwert, Median und Standardabweichung für diese Stichprobe.
- (b) Berechnen und zeichnen Sie den Box-Plot für diese Stichprobe.

Aufgabe 7.2 Kombinatorik I

- a) Wie viele Wörter über dem Alphabet $\{v, w, x, y, z\}$ mit 10 Buchstaben gibt es, die genau 8 z's enthalten? Wie viele Wörter enthalten mehr als 7 z's?
- b) Eine Klausur mit 5 Aufgaben wird aus dem Fundus der Probeklausuren zusammengestellt: 2 Aufgaben aus der Statistik und 3 aus der Linearen Algebra. Der Fundus enthält 5 Statistikaufgaben und 6 Lineare-Algebra-Aufgaben. Wie viele verschiedenartige Klausuren sind möglich?
- c) Wie viele nichtnegative 4-stellige Zahlen gibt es, für die jede i -te Ziffer eine durch i teilbare Zahl ist? (0 ist durch keine Zahl teilbar)

Aufgabe 7.3 Kombinatorik II

Ein Würfel wird 3-mal hintereinander geworfen. Berechnen Sie mit der Methode der Laplaceschen Wahrscheinlichkeit:

- a) Wie wahrscheinlich ist Augensumme 3?
- b) Wie wahrscheinlich ist Augensumme 4?
- c) Wie wahrscheinlich ist Augensumme 9?
- d) Bei c) ist es nicht ganz einfach, korrekt zu zählen. Wenn Sie Lust haben, können Sie ein kleines Programm (Java, Python, Excel) schreiben, das N -mal den 3fach-Würfel simuliert und die Wahrscheinlichkeiten über relative Häufigkeiten annähert. Kommt dasselbe heraus? Wie groß muss N etwa sein, um auf 3 Stellen nach dem Komma genau zu sein?

Aufgabe 7.4 Kombinatorik III

- a) 5 Würfel werden gleichzeitig geworfen. Wieviel Wurfresultate gibt es?
- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 3 Würfeln mindestens 2 Fünfer zu erzielen?
- c) Ein Würfel wird fünfmal geworfen. Wie viele Resultate gibt es? Wie wahrscheinlich ist es, mit einer Eins zu beginnen und einer Fünf zu enden?

Aufgabe 7.5 Rucksack

Wie viele Möglichkeiten gibt es, einen Rucksack zu packen, wenn n Gegenstände zur Auswahl stehen? (Es kommt am Ende nur auf den Inhalt im Rucksack an, nicht auf die Reihenfolge. Der Rucksack kann $k=0, \dots, N$ Gegenstände enthalten.)

Hinweis: Es gibt (mindestens) zwei alternative Lösungswege. Wenn Sie beide finden, können Sie zu einer interessanten und wichtigen Einsicht kommen (!)

Aufgabe 7.6 Geburtstag

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 10 Personen mindestens 2 am gleichen Tag Geburtstag haben? Erst "aus dem Bauch heraus" schätzen, dann ausrechnen! Wie lautet die Formel allgemein für k Personen? Ab welcher Gruppengröße lohnt sich im Schnitt eine Wette: "Wetten, dass in dieser Gruppe mindestens 2 Personen am gleichen Tag Geburtstag haben?"

Hinweis: Betrachte komplementäres Ereignis "keine 2 Personen haben am gleichen Tag Geburtstag".

OPTIONAL {in MAPLE oder Excel/VBA oder Java}: Schreiben Sie eine Prozedur, mit der Sie zahlreiche Gruppen variabler Größe simulieren können und überprüfen Sie so empirisch Ihre Ergebnisse.

Aufgabe 7.7 Das Nim-Spiel

Sie kennen wahrscheinlich das Spiel Nim, sonst kurz bei Wikipedia unter [Nim-Spiel](#) nachschlagen. Nehmen wir an, Sie spielen das Spiel mit $S=3$ Stapeln mit je $N=4$ Steinen:



Wir bezeichnen mit 1-3-1 den Spielzustand in dem der 1. Stapel 1 Stein, der 2. Stapel 3 Steine und der 3. Stapel wieder 1 Stein enthält.

- (a) Wie viele verschiedene Spielzustände gibt es, wenn man 1-3-1 und 1-1-3 als unterschiedliche Spielzustände auffasst?
- (b) Jetzt sind aber von der Spielstrategie her 1-3-1 und 1-1-3 und 3-1-1 völlig bedeutungsgleich. Wie viele verschiedenen Spielzustände gibt es, wenn man alle solche Permutationen jeweils zu einem Spielzustand zusammenfasst?
- (c) Wie lauten die Lösungen zu (a) und (b), wenn man $N=10$ Steine in jedem Stapel hat?
- (d) ⁽⁺⁾ Wie lauten die Lösungen zu (a) und (b) bei $S=4$ und $N=4$?

[Hinweis: Aufg. 7.7(d) ist etwas für Knobler oder Programmierer, sie ist schwieriger als Klausurlevel. Oder Sie kommen auf den richtigen Dreh, dann ist es ganz einfach!]

Aufgabe 7.8 Zahlenscrabble

Wie viele verschiedene 7-stellige Zahlen kann man aus den Ziffernvorrat $\{2,2,2,2,3,1,4\}$ bilden?

Aufgabe 7.9 Zufallsvariablen im Restaurant

Ein Restaurant notiert sich, wie häufig jede Personenzahl pro Tisch vorkommt und erhält folgende Ergebnisse:

Anzahl Personen X	mittlerer Verzehr Y pro Tisch	Anzahl n_i (absolute Häufigkeit)	relative Häufigkeit h_i
1	40 €	125	
2	100 €	400	
3	120 €	175	
4	160 €	100	
Summe		800	

- Berechnen Sie die relativen Häufigkeiten, die kumulierten Häufigkeit und zeichnen Sie die Häufigkeitsverteilungsfunktion.
- Nehmen Sie an, dass die relativen Häufigkeiten den Wahrscheinlichkeiten für die Zufallsvariablen X und Y entsprechen. Berechnen Sie damit die Erwartungswerte $E(X)$ und $E(Y)$
- Berechnen Sie Varianz und Standardabweichung für die Zufallsvariablen X und Y.
- Wie wahrscheinlich ist es, dass am nächsten Tisch 3 oder 4 Personen Platz nehmen?

Aufgabe 7.10 Hellseher

Ein Hellseher wirbt mit folgender Anzeige:

**Sage werdenden Eltern das Geschlecht ihres Kindes voraus.
Bei Nichteintreffen Geld zurück!**

Die Vorhersage kostet 100€, der Hellseher wirft eine Münze. Die Wahrscheinlichkeit einer Mädchengeburt sei 0.465. Berechnen Sie das mittlere Jahreseinkommen des Hellsehers, wenn 100 Anfragen je Monat eintreffen. Mit welcher Strategie kann er sein Jahreseinkommen (bei gleichem Tarif) verbessern?

Hinweis: Stellen Sie eine Zufallsvariable "Gewinn" auf und berechnen Sie ihren Erwartungswert.

Aufgabe 7.11 Binomialverteilung

Eine Serienproduktion von Transistoren hat einen gleichbleibenden Ausschuss-Anteil von $p=3\%$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Stichprobe von $n=50$ entnommenen Einheiten

- (a) keine, (b) genau zwei, (c) höchstens zwei
fehlerhafte Bauteile sind?

Wie groß sind Erwartungswert und Varianz der Anzahl X der fehlerhaften Bauteile in der Stichprobe?

Aufgabe 7.12 Normalverteilung 1

Es sei bekannt, dass in einem Rechnernetz pro 1000 übertragener Pakete die Anzahl X der fehlerhaft übertragenen Pakete binomialverteilt sind mit Erwartungswert $\mu=80$.

- (a) Zeigen Sie, dass die auf 2 Nachkommastellen gerundete Standardabweichung $\sigma=8.58$ betragen muss.
- (b) Überprüfen Sie die Voraussetzungen für den Satz von Moivre-Laplace und berechnen Sie dann:
- (c) die Wahrscheinlichkeit, dass weniger als 70 aus 1000 Paketen und
- (d) die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 90 aus 1000 Paketen fehlerhaft übertragen werden.

Hinweis: Tabelle der Funktion $\Phi(x)$ aus Formelsammlung benutzen.

Aufgabe 7.13 Normalverteilung 2

Sie sind Sys-Admin. Die durchschnittliche Wartezeit zwischen zwei Hacker-Attacken auf Ihrem zentralen Server sei $N(48h, (6h)^2)$ -verteilt. Gerade ist eine Attacke passiert. In welchem Zeitintervall ist mit 82% mit der nächsten Attacke zu rechnen?

Aufgabe 7.14 Normalverteilung 3 (aus einer Klausur)

Bei der Fertigung von SSD-Chips treten 20% ‚Bad Blocks‘ (defekte Datenblöcke) auf.

- a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter 100 Blöcken $X=25$ oder mehr ‚Bad Blocks‘ sind.
- b) Bestimmen Sie ein zu 20 symmetrisches Intervall mit der Eigenschaft, dass die Anzahl der ‚Bad Blocks‘ mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% in diesem Intervall liegt.

Hinweis zu b): Verwenden Sie den Grenzwertsatz von De Moivre-Laplace. Überprüfen Sie zunächst, ob Sie ihn anwenden dürfen. Entnehmen Sie die Werte der Standardnormalverteilung einer geeigneten Tabelle.

Aufgabe 7.15 Zentraler Grenzwertsatz im Restaurant

Ausgangspunkt ist Aufgabe 7.9 „Zufallsvariablen im Restaurant“. D.h. Sie können die Werte für $E(Y)=102.5$ und $\text{Var}(Y)=1093.75$ verwenden, die Sie in Aufgabe 7.9 berechnet haben.

An einem bestimmten Tag werden in diesem Restaurant $n=70$ Tische bedient. Sie können davon ausgehen, dass die Summen der Zufallsvariablen **normalverteilt** sind (**zentraler Grenzwertsatz**).

- (a) Welchen Umsatz S_n kann der Restaurantchef im Mittel an einem solchen Tag erwarten?
- (b) In welchem zu S_n symmetrischen Intervall $[S_n - x, S_n + x]$ liegt der Umsatz eines solchen Tages mit Wahrscheinlichkeit 68.2%?
- (c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt das Restaurant an einem solchen Tag einen Umsatz von über 7500€?