

Übungsblatt 8 Komplexe Zahlen + DGL

In den nachfolgenden Aufgaben bezeichnet i jeweils die imaginäre Einheit.

Aufgabe 8.1 Rechnen mit komplexen Zahlen

Berechnen Sie:

- a) $4i - 5 + i(1 - i)$
- b) $|4 + 6i| - |4 - 6i|$
- c) $\frac{3+2i}{3-2i}$
- d) $\frac{i}{\cos(\frac{\pi}{3}) - i \sin(\frac{\pi}{3})}$

Aufgabe 8.2 Darstellungsformen komplexer Zahlen

Ergänzen Sie die jeweils fehlenden Darstellungsformen

	kartesische Form	Polarform	
		trigonom. Form	Exponentialform
a)		$\cos(\frac{\pi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{2})$	
b)			$2e^{i\pi}$
c)	$-i$		
d)			$\sqrt{45}e^{i\varphi}$
e)	$4 - 12i$		

Bei d) sei $\varphi = \arctan(-2) + \pi$

Aufgabe 8.3

Man berechne Real- und Imaginärteil von

$$z = (1 + \sqrt{3} \cdot i)^5$$

Aufgabe 8.4 Graphisches Rechnen mit komplexen Zahlen

Gegeben sind die beiden komplexen Zahlen: $z_1 = 1 - 5i$; $z_2 = 4 + 3i$.

- a) Addieren und subtrahieren Sie die Zahlen graphisch in der Gaußschen Zahlenebene. Zeichnen Sie die konjugiert komplexe Zahl zu z_1 ebenfalls ein.
- b) Man stelle z_1 und z_2 in Exponentialform dar. Bilden Sie nun z_1^2 , $\sqrt[3]{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$ ebenfalls mit graphischen Methoden.

Bereiten Sie die Aufgaben für den 03.06.2024 so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

Aufgabe 8.5 Additionstheoreme

a) Leiten Sie die "normalen" Additionstheoreme

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

aus der Eulerschen Formel (Satz S 11-3) her.

b) Leiten Sie die Additionstheoreme

$$\cos(3\varphi) = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi$$

$$\sin(3\varphi) = 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi$$

aus dem Satz von Moivre (Satz S 11-5) her

Aufgabe 8.6 Lösung algebraischer Gleichungen

Man bestimme für Z alle Lösungen $z_k \in \mathbb{C}$ in kartesischer Form.

Zeichnen Sie die $z_k \in \mathbb{C}$ in der komplexen Ebene!

a) $z^6 - 64 = 0$

b) $(2 + 2\sqrt{3} \cdot i)z = 8e^{i \cdot \pi}$

c) $z^2 = i$

Aufgabe 8.7

λ sei eine beliebige reelle Zahl. Bestimmen Sie die zwei komplexen Lösungen der folgenden Gleichung mittels quadratischer Ergänzung:

$$z^2 - (\lambda - 2i)z - (1 + \lambda i) = 0$$

Ermitteln Sie Real- und Imaginärteile von $z_{1,2} \in \mathbb{C}$. Stellen Sie beide Lösungen auch in der Exponentialform $Z = r \cdot e^{i\varphi}$ dar.

Aufgabe 8.8 DGL mit nur einem Ableitungsterm

Die Beschleunigung einer Kugel in einem Computerspiel sei gegeben durch die Differentialgleichung

$$s''(t) = 2t$$

(a) Interpretieren Sie die Differentialgleichung (Ordnung, explizit/implizit, homogen/inhomogen), jeweils mit einem Begründungssatz.

(b) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung. Wie viele freie Parameter hat sie?

(c) Lösen Sie die Differentialgleichung für die Anfangsbedingungen:

$$s(0) = 5, \quad s'(0) = 3$$

Aufgabe 8.9 Anfangswertproblem

Ermitteln Sie die Lösung des Anfangswertproblems (Ansatz: $y(t) = e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$)

$$x''(t) + 6x'(t) + 8.75x(t) = 0, \quad x'(0) = 8, \quad x(0) = 0$$

Aufgabe 8.10 Lineare DGL

(a) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der DGL (Ansatz: $y(t) = e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$)

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 0$$

(b) Ermitteln Sie die spezielle Lösung für $y(0) = -1 - 2i$ und $y'(0) = 5$.

(c) Machen Sie die Probe, ob die spezielle Lösung die DGL löst.