Bereiten Sie die Aufgaben parallel zu den in der Vorlesung besprochenen Themen für die nächsten Übungsstunden vor

Aufgabe 1

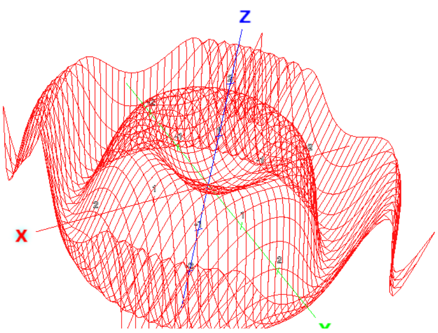
Gegeben sei a) $f(x,y)=\sqrt{16-x^2-y^2}$ b) $f(x,y)=x^2-y+2$

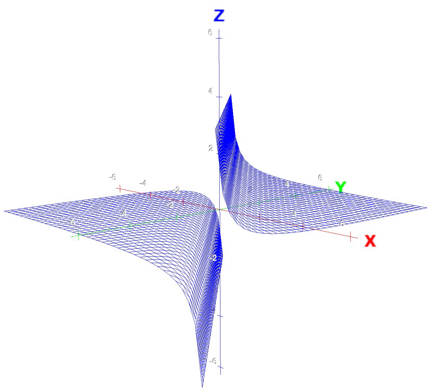
Bestimmen Sie für diese Funktionen die Gleichungen der *Höhenliniendiagrammkurven* und der *Schnittkurven* (Schnittebenen parallel zur x,z-Ebene bzw. y,z-Ebene) für z_0 bzw. y_0 bzw. $x_0 = 0,1,2,3,4$ bei Teilaufgabe a) für z_0 bzw. y_0 bzw. $x_0 = -1,0,1$ bei Teilaufgabe b)

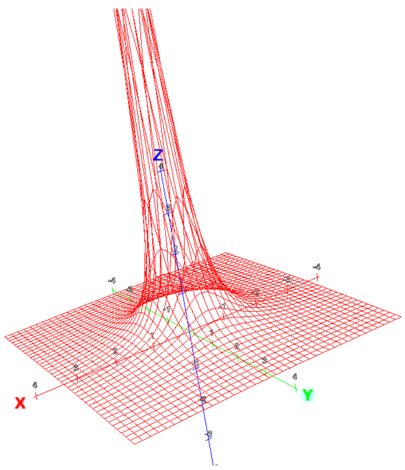
Versuchen Sie, eine 3D-Skizze zu erstellen und beschreiben Sie dann die durch f dargestellte Fläche im dreidimensionalen Raum.

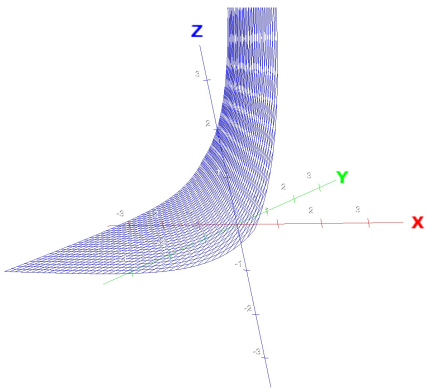
Aufgabe 2

Nachfolgend sind vier graphische Darstellungen von 3D-Funktionen zu sehen. Überlegen Sie sich zu jeder einzelnen, wie die Funktionsgleichung aussehen könnte. Betrachten Sie dazu den Funktionswert an der Stelle (x,y)=(0,0), dann betrachten Sie, wie die Funktionswerte für sehr große x und y aussehen. Schwanken die Funktionswerte? Aus der Kenntnis über Eigenschaften von Funktionen mit einer unabhängigen Variablen, sollten Sie zumindest sagen können, welche Funktionen eventuell in die Gleichung eingehen. Es wird nicht erwartet, dass Sie exakt die jeweilige Funktionsgleichung angeben, sondern nur etwas über die etwaige Gleichung aussagen.









Aufgabe 3

Bestimmen Sie die *partiellen Ableitungen 1.Ordnung* von folgenden Funktionen:

a) $f(x,y) = x^3 + xy - y^{-2}$ b) $f(a,b) = (ax + bx^2)^{-1} + ye^{ab}$

c) $f(x,y) = \cos(x+y) \cdot \cos(x-y)$ d) $f(x,y,z) = e^x \ln y + z^2 \cos(y)$

Aufgabe 4

Berechnen Sie den Gradienten von nachfolgenden Funktionen erst allgemein, dann in der angegebenen Richtung:

a) $f(x,y) = \dfrac{x}{3y-2x}$ in Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $f(x,y) = (3x + xy)^2$ in Richtung $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $f(x,y,\varphi) = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos\varphi}$ in Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$

Aufgabe 5

Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen 1. Ordnung von

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma} x_4^{\delta} e^{x_1+x_2+x_3+x_4}$$

Versuchen Sie, einen Zusammenhang zwischen partieller Ableitung und der Funktion herzustellen.

Aufgabe 6

Berechnen Sie mit Hilfe des totalen Differenzials die Oberflächenänderung eines Zylinders mit Boden und Deckel, dessen Radius r = 10 cm um 5 % vergrößert und dessen Höhe h = 25 cm gleichzeitig um 2 % verkleinert wurde. Vergleichen Sie diesen Näherungswert mit dem exakten Wert.

Aufgabe 7

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y,z) = \frac{(x+y)(x+z)^2}{(y+z)^3}$$

Berechnen Sie mit Hilfe des totalen Differentials den ungefähren Zuwachs der Höhenkoordinate für den Punkt (100;150;100) in der Definitionsebene, bei Änderungen dx=dy=dz=2. Vergleichen Sie mit der tatsächlichen Änderung der Funktionswerte.

Aufgabe 8

Bestimmen Sie von folgenden Funktionen die angegebenen partiellen Ableitungen höherer Ordnung:

a) $z = f(x,y) = x^3 + 2xy^2 - 5xy^3 + y^4 \quad z_{xx}, z_{yx}, z_{yyx}$

b) $z = f(x,y) = 4y(\ln x)^2 \quad z_{yxx}, z_{yyx}, z_{xyxy}$

Aufgabe 9

Wie lautet die Gleichung der Tangentialebene der Funktion

$$z = f(x,y) = x^2 \cdot e^{xy}$$

im Punkt $P_0(1;0;1)$?

Aufgabe 10

Bestimmen Sie die Extremwerte folgender Funktionen:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 10$
b) $f(x,y) = x^2 - y^2$
c) $f(y,y) = 2x^3 - 3x^2 - 2y^3 + 3y^2$

Weisen Sie nach, ob es sich um ein Maximum oder um ein Minimum handelt oder ob diese Eigenschaft nicht zutrifft. Bei der Auswertung der notwendigen Bedingungen müssen Sie eventuell geschickt umformen, um schnell zu einer Lösung zu kommen.

Aufgabe 11

a) Untersuchen Sie, für welche Werte des Parameters a die folgende Funktion Minima und für welche Werte si Maxima besitzt: $f(x,y) = -x^3 + 6axy - y^3$ $(a \neq 0)$

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x,y)=c - x^2-y^2$ im Punkt (0,0) ein lokales Maximum besitzt.

Aufgabe 12

Bestimmen Sie mit Hilfe der *Methode von Lagrange* die Kandidaten für die relativen Extremwerte folgender Funktion:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4$$

unter der Nebenbedingung

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$$

Aufgabe 13

Bestimmen Sie mit Hilfe der *Methode von Lagrange* die Kandidaten für die relativen Extremwerte folgender Funktion:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

unter den Nebenbedingungen

$$g_1(x, y, z) = x + y - 1 = 0 \qquad g_2(x, y, z) = y + z + 4 = 0$$

Aufgabe 14

Berechnen Sie mit Hilfe der *Methode von Lagrange* für die Funktion f unter der Nebenbedingung g die Kandidaten für die Extremwerte

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}$$

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 - 3a = 0$$

Aufgabe 15

Bestimmen Sie die Gleichung der Regressionsgeraden für folgende Messpunkte, indem Sie den Ansatz $y=ax+b$ wählen und für die entsprechende Funktion $Q(a,b)$ der Summe der Abstandsquadrate mit den beiden unabhängigen Variablen a und b das Minimum bestimmen. Den Nachweis, dass es sich um ein Minimum handelt, müssen Sie nicht erbringen:

x_i	3	7	9	5	6
y_i	5	8	10	8	4