

Übungsblatt 12

Komplexe Zahlen und Differentialgleichungen

Aufgabe 12.1

Gegeben sind die komplexen Zahlen

a) $z_1=9-7i$ $z_2=3+2i$

b) $z_1=4/3+1/2i$ $z_2=4/3-1/2i$

Berechnen Sie :

$$z_1 + z_2$$

$$z_1 - z_2$$

$$z_1 \cdot z_2$$

$$z_1 : z_2$$

$$\bar{z}_1 \cdot z_2$$

$$\bar{z}_2 : z_1$$

jeweils für die Werte aus a) und b)

Aufgabe 12.2

Berechnen Sie und geben Sie das Ergebnis in Normalform an:

a) $i \cdot \sqrt{x^2} \cdot i \cdot \sqrt{y^2}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$

b) $(-i)^{18}$

c) $-i^{17}$

d) $\frac{1}{i^4} + \frac{1}{i^7}$

e) $(2\sqrt{3} - 3i\sqrt{2})^2$

Aufgabe 12.3

Berechnen Sie die folgenden Quotienten, indem Sie den Nenner reell machen:

a) $\frac{5}{1-2i}$

b) $\frac{\sqrt{3} + i\sqrt{2}}{\sqrt{3} - i\sqrt{2}}$

c) $\frac{3i}{2 + 5i\sqrt{2}}$

Aufgabe 12.4

Seien $z, z' \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

a) $(\operatorname{Re}(z \cdot z'))^2 + (\operatorname{Im}(z \cdot z'))^2 = |z|^2 |z'|^2$

b) $2 \operatorname{Re}(zz') = z\bar{z}' + z'\bar{z}$

Aufgabe 12.5

Berechnen Sie:

a) $\frac{4+3i}{3+4i}$ b) $\operatorname{Re}\left((2+2i)\left(1-\frac{|3-3j|}{3}i\right)\right)$ c) $\left|\frac{5+5i}{1-3i}\right|$

Aufgabe 12.6

Bilden Sie jeweils aus den folgenden Angaben die Normalform, die trigonometrische und die Exponentialform der komplexen Zahl:

a) $z = -3i$

b) $z = 8$

c) $r = 3, \varphi = \pi/2$

d) $r = 8, \varphi = -\pi$

e) $\operatorname{Re} z = 3, \operatorname{Im} z = 5$

f) $z = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$

g) $z = e^{-3i\pi}$

Aufgabe 12.7

Berechnen Sie folgende Potenzen und geben Sie das Ergebnis in der Normalform an:

a) $(1 + \sqrt{3}i)^{15}$

b) $(3 + 4i)^3$

c) $\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^5$

Aufgabe 12.8

Berechnen Sie folgende Wurzeln:

a) $\sqrt{-1+\sqrt{3}i}$ b) $\sqrt[3]{3-\sqrt{3}i}$ c) $\sqrt[6]{i}$ d) $\sqrt[3]{81e^{-i190^\circ}}$

Aufgabe 12.9

Lösen Sie die folgenden Gleichungen in der Menge der komplexen Zahlen:

a) $z^4 = 1 - i$ b) $z^5 = \cos 225^\circ + i \sin 225^\circ$

Aufgabe 12.10

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Lösen Sie diese DGL mit Hilfe der isoklinen Methode.

Aufgabe 12.11

Skizzieren Sie das Richtungsfeld der jeweiligen Differentialgleichung 1.Ordnung mit Hilfe von Isoklinen und versuchen Sie, eine Lösungskurve einzuzichnen. Können Sie eine Aussage darüber machen, wie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet?

a) $y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{x}$, $x > 0$ b) $y' = y$

Aufgabe 12.12

Lösen Sie folgende Differentialgleichungen durch Trennung der Variablen:

a) $x^2 \cdot y' = y^2$ b) $y' \cdot (\sin y) = -x$

Aufgabe 12.13

Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme durch Trennung der Variablen:

a) $y' + (\cos x) \cdot y = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$ b) $y^2 \cdot y' + x^2 = 1, y(2) = 1$ c) $y \cdot y' = 2e^{2x}, y(0) = 2$

Aufgabe 12.14

Lösen Sie folgende Differentialgleichung mit Hilfe einer geeigneten Substitution:

$$x^2 \cdot y' = \frac{1}{4}x^2 + y^2$$

Aufgabe 12.15

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen 1. Ordnung:

a) $y' + 4y = 0$

b) $y' = y \cdot \sin x$

Aufgabe 12.16

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichung:

$$x \cdot y' - y = 2x \cdot (\ln x)$$

Aufgabe 12.17

Lösen Sie folgenden Differentialgleichungen durch Aufsuchen einer partikulären Lösung:

a) $y' + 2y = 4e^{5x}$

b) $y' - 5y = \cos x + 4\sin x$