Bereiten Sie die Aufgaben für den 21.03.2011 so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

Übungsblatt 7 Funktionen mehrerer Variablen

Aufgabe 7.1 Höhere partielle Ableitungen

Bestimmen Sie sämtliche partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung von

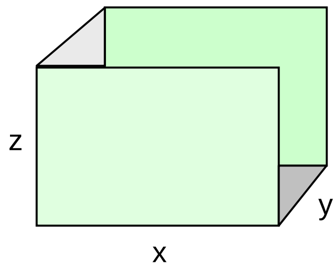
(a) $z(a,\phi) = a\cos^2(\phi)$ (b) $f(r,s) = e^{s^2+rs}$

(c) $g(x,y,z) = \ln(x^2yz^2) + \frac{x+y}{z^2} + xy^2z^3$

(Die stetige Differenzierbarkeit aller Funktionen sei vorausgesetzt.)

Aufgabe 7.2 Extrema

(a) Ein quaderförmiges Profil, das an 2 Seiten offen ist (s. Zeichnung) umschließt ein Volumen V ("Bounding Volume"). Wie müssen die Seitenlängen x, y und z gewählt werden, damit der Materialverbrauch für die Flächen minimal ist? Welche Werte ergeben sich für V=16?



(b) Die Studentin Lara will unbedingt die nächste Klausur in Mathematik bestehen. Hierzu muss sie ihren Wissensstand W verbessern. Ihr Wissensstand W ist eine Funktion der Anzahl t der Lerntage und der Menge d (in g) einer von ihr konsumierten Wunderdroge. Es gilt:

$$W = W(d,t) = 200 + 8d^2 + 6t - \tfrac{1}{3}d^3 - 0.5t^2$$

Wie soll Lara ihre Lernzeit und die Wunderdroge einsetzen, damit ihr Wissensstand beweisbar maximal wird? Welchen Wissensstand erreicht sie dann?

[Hinweis: Sie müssen nur das richtige lokale Optimum finden, die Ränder brauchen Sie nicht zu betrachten!]

Zeigen Sie jeweils, dass Ihre Lösung ein lokales Minimum darstellt. Können Sie bei (a) und (b) mit Satz S8-4 auch etwas über das globale Minimum aussagen?

Aufgabe 7.3 Kurvendiskussion

Untersuchen Sie, für welche Werte des Parameters a die folgende Funktion Minima, Maxima oder Sattelpunkte besitzt (und wo):

$$f(x,y) = -x^3 + 6axy - y^3 \quad (a \neq 0)$$

Bereiten Sie die Aufgaben für den 21.03.2011 so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

Aufgabe 7.4 Kleinste Quadrate

Durch die n=3 Messpunkte

x_i	1	4	6
y_i	2	4	8

ist eine optimale Funktion vom Typ $y = f(x) = k\, 2^{bx}$ zu legen.

Hinweis: man logarithmiere die Werte, $z_i = \mathrm{ld}(y_i)$, und entsprechend auch die Funktion f !

Zeichnen Sie Ihr Ergebnis, sowohl im logarithmierten Raum, als auch im Ursprungsraum.

Aufgabe 7.5 Gradient und Tangentialebene

Gegeben seien die Funktionen $f(x,y) = y/x^2 + x^2\, y - 3xy$.

a) Man gebe für f die Tangentialebene und den Gradienten im Punkt $\mathbf{x}_0 = (1,1)$ an.

b)$^+$ Man überprüfe für die Funktion $f(x,y)$, dass der Gradient <u>überall</u> auf den Höhenlinien senkrecht steht.

Hinweis: Schreibe die Linien konstanter Höhe als Bahnkurven $(x(t),y(t))^T$ und differenziere (führt auf Tangentialvektor). Multipliziere nun mit dem Gradienten.

Aufgabe 7.6 Lagrange-Multiplikator 1

Lösen Sie Aufgabe 7.2(a) mit der Methode von Lagrange.

Aufgabe 7.7 Lagrange-Multiplikator 2

Gegeben sei der Punkt $P = (x,y) = (2,2)$. Wo liegen die Punkte auf der durch die Gleichung $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$ definierten Ellipse, die den kleinsten bzw. größten Abstand zu P haben?

Hinweis: Sie können sich die Rechnung ganz wesentlich erleichtern, wenn Sie beachten, dass d^2 die gleichen Extrempunkte hat wie d (!!)

Machen Sie sich durch eine Zeichnung klar, welches Extremum das Minimum und welches das Maximum darstellt.