Übungsblatt 8 Graphen

Aufgabe 8.1 Anzahl Kreise in vollständigen Graphen

Gegeben seien **vollständige** Graphen mit 3,4,5,…, N Knoten.

a) Wieviele verschiedene Kreise gibt es im vollständigen Graphen mit 3 Knoten?
b) Wieviele verschiedene Kreise gibt es im vollständigen Graphen mit 4 Knoten?
c) Wieviele verschiedene Kreise gibt es im vollständigen Graphen mit 5 Knoten?
d) (+) Verallgemeinern Sie Ihre Antwort auf den vollständigen Graphen mit N Knoten. Können Sie zeigen, dass für große N Ihre Formel immer näher an die obere Abschätzung $N!\cdot e$ heranrückt, worin e = 2.71828 die Eulersche Zahl ist ?

[Hinweis: Die Anzahl der 3-Kreise im 5er-Graphen ist z. B. 5·4·3, denn ich habe 5 Möglichkeiten für den Startknoten, dann noch 4 Möglichkeiten für den 2. Knoten und 3 für den 3. Knoten (von dem es wieder zurückgeht zum Startknoten).]

Aufgabe 8.2 Flugnetz "chickenwings"

Die Airline "chickenwings" hat ein Streckennetz, das durch folgende Liste gegeben ist:

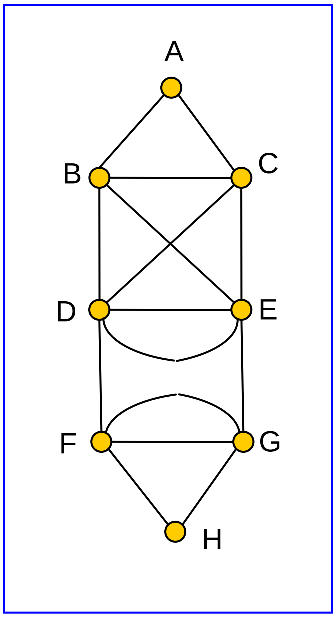
Nr.	Knoten	benachbarte Knoten
1	Rom	Wien, Madrid, Berlin, Chicago
2	Wien	Rom, Chicago
3	Berlin	Rom, Chicago
4	Chicago	Wien, London, Rom, Berlin
5	Madrid	Rom, London
6	London	Madrid, Chicago

(a) Zeichnen Sie den Graphen, in planarer Form.
(b) Geben Sie seine Adjazenzmatrix an.
(c) Geben Sie, wenn möglich, zwei verschiedene Eulerzüge an.

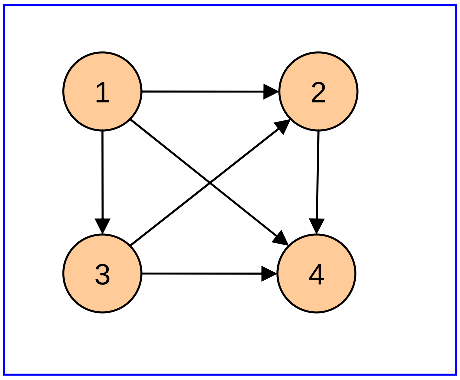
Aufgabe 8.3 Euler-Züge

Ein Eulerzug wurde in Def D 9-9 definiert. Ein **offener Eulerzug** ist eine Kantenfolge, die jede Kante genau einmal besucht, aber nicht an ihren Ausgangspunkt zurückkehrt.

(a) Schreiben Sie zu nebenstehendem Graphen "Haus vom Nikolaus mit Keller" die Adjazenzmatrizen für die Subgraphen {B,C,D,E} und { B,C,D,E,F,G} auf.
(b) Besitzt der Graph Eulerzüge oder offene Eulerzüge? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort! Geben Sie fallweise je ein Beispiel für solche Züge an.



Aufgabe 8.4 Wege der Länge n



(a) Für bestimmte Graphen gilt die Regel: **Die Elemente der n. Potenz A^n der Adjazenzmatrix A liefern die Anzahl der Wege mit Länge n.** Finden Sie damit heraus, wieviele Wege der Länge 1,2,3,...,8 es zwischen Knoten 1 und 4 im nebenstehenden Graphen gibt.

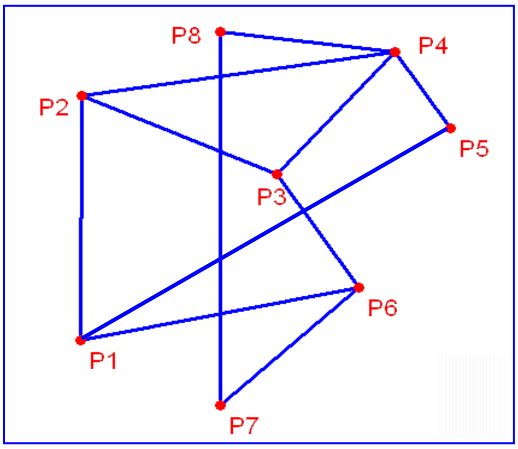
(b)$^+$ Können Sie begründen, warum A^2, A^3,... die Wege der Länge 2,3,... enthält?

[Hinweis: Schreiben Sie sich die (Summen-)Formel für ein Element p_{ij} der Potenzmatrix $P=A^n$ hin.]

(c) Nun fügen wir eine Verbindung $4 \rightarrow 2$ hinzu. Jetzt gilt die Regel aus (a) so nicht mehr. Wie muss man sie abändern, also was liefern die Elemente von A^n nunmehr? Bestimmen und interpretieren Sie A^8, möglichst OHNE A 8mal mit sich selbst zu multiplizieren.

(d) Für welche Graphen gilt die ursprüngliche Regel aus (a)?

Aufgabe 8.5 Aufspannende Bäume



Zeichnen Sie den nebenstehenden Graphen in möglichst "hübscher" Form (d.h. möglichst überschneidungsfrei und mit möglichst kurzen Kanten).

Für diesen Graphen führen wir Kantenbewertungen ein: (a) die Summe der angrenzenden Knotennummern (z.B. hat die Kante zwischen Knoten P2 und P3 die Bewertung 2+3=5) bzw (b) die Differenz "groß – klein" (d.h. die Kante zwischen Knoten P1 und P6 hat die Bewertung 6-1=5) .

1. Geben Sie für die so bewerteten Graphen je einen minimalen aufspannenden Baum nach dem Algorithmus von Kruskal an.
2. Geben Sie für den Graphen nach (a) den aufspannenden Baum für Tiefensuche ab Knoten P3 sowie für Breitensuche ab P3. Nehmen Sie jeweils die kleinste Knotennummer, wenn mehrere Knoten möglich sind.
3. In was unterscheidet sich der Tiefensuche-/Breitensuche-Baum, wenn man die Graphenbewertung aus (b) zugrundelegt? Welcher der in Aufgabe 8.5 entwickelten aufspannenden Bäume hat die wenigsten Kanten? Begründen Sie!

Aufgabe 8.6 Party

Ist es möglich, dass sich auf einer Party 9 Personen befinden, von denen jede genau 5 andere kennt?

Können Sie allgemein angeben, wann der Satz *"N Personen kennen jeder genau k andere Personen"* stimmen kann bzw. nicht stimmen kann?

Aufgabe 8.7 Huffman und Präfixcodes

<u>Info-Teil:</u> [nach Hartmann04, S. 213-215]

Motivation: Eine Telefonnummer besteht aus mehreren Ziffern, ein Zeichen aus mehreren Bits. Woher weiss die Telefonvermittlung eigentlich, wann ich meine Telefonnummer fertig gewählt habe? Weiter: Wie kann ich als Sender eine Folge von Zeichen so in einem Bit-Datenstrom übertragen, dass der Empfänger die Zeichen auch wieder trennen kann?

Mögliche Antwort 1: Feste Zeichenlänge vereinbaren. Ist nicht so bei Tel.Nr. (man denke an Notruf 110). Ist auch nicht gut erweiterbar.

Antwort 2: Man verwende Präfixcodes.

Definition: Ein **Präfixcode** ist ein Code, in dem kein Codewort Anfangsteil eines anderen Codewortes ist.

Das TelefonNr.-System <u>ist</u> ein Präfixcode.

Das Morsealphabet ist <u>kein</u> Präfixcode, denn E="." ist Anfangsteil von A=".-".

Jeder Präfixcode läßt sich als binärer Wurzelbaum darstellen, mit den Zeichen als Blätter.

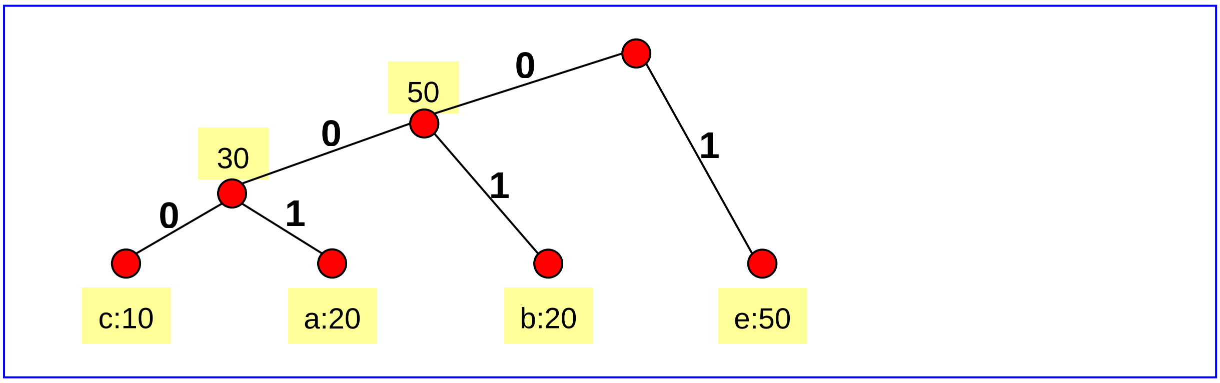
Gegeben ein Datenstrom, in dem verschiedene Zeichen mit verschiedenen Häufigkeiten vorkommen, z.B. a: 20%, b: 20%, c: 10%, e: 50%

Gesucht: Ein Code, der den Datenstrom als Bitstrom optimaler Länge überträgt.

Der **Huffman-Algorithmus** ordnet jedem Zeichen einen solchen Präfixcode zu:

1. Starte mit Menge B = Menge aller Zeichen
2. Suche in B die zwei Knoten mit den kleinsten Häufigkeiten und verbinde sie zu Teilbaum. Ordne dem Vaterknoten die Summe der Häufigkeiten zu.
3. Ersetze in B die zwei Knoten durch ihren Vaterknoten. Weiter bei 2., solange bis B nur noch 1 Element enthält (die Wurzel des Baumes).
4. Beschrifte im Baum jeden linken Ast mit 0, jeden rechten Ast mit 1. Das Codewort eines Blattes ist die von der Wurzel aus ablesbare Bitfolge.

Im Beispiel entsteht so folgender Baum, der z.B. a das Codewort **001** zuordnet:



Bereiten Sie die Aufgaben für den 18.04.2011 so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

Aufgaben-Teil:

(a) Sind die nachfolgenden Codes (i) und (ii) Präfixcodes? Wenn ja, zeichnen Sie den zugehörigen Binärbaum.

(i) a=11, b=1010, c=1011, d=1000, e=01, f=001, g=000

(ii) a=00, b=010, c=011, d=10, e=110, f=111, g=0110, h=0111

(b) Für jeden Code aus (a), der ein Präfixcode ist, entschlüssele man den folgenden Bitstrom in seine Zeichen:

000001010111100000110101011110 1

(c) Konstruieren Sie den Huffman-Code für das Alphabet {a,b,c,d,e,f,g,h} mit der Häufigkeitsverteilung {4,6,7,8,10,15,20,30} (also a: 4%, b: 6%, usw...).