Übungsblatt 7 Funktionen mehrerer Variablen

Aufgabe 7.0 Höhenlinien

Erstellen Sie ein Höhenliniendiagramm (durch handschriftliche Rechnung, nicht mit Maple!) für nachfolgende Funktionen. Wählen Sie dabei geeignete Höhenwerte aus.

$$(a) f(x, y) = 2xy \qquad (b) f(x, y) = \frac{-4x}{x^2 + y^2 + 1}$$

Vergleichen Sie anschließend Ihre Diagramm-Ergebnisse mit Maple!

Hinweis zu (b) Die Kreisgleichung für einen Kreis mit Radius r am Punkt (x_0, y_0) lautet:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \text{ Versuchen Sie, auf diese Gleichung zu kommen!}$$

Aufgabe 7.1 Höhere partielle Ableitungen

Bestimmen Sie sämtliche partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung von

$$(a) z(t, \phi) = \sin(at + \phi) \qquad (b) f(x, y) = e^{xy^2}$$

$$(c) g(x, y, z) = x^2yz + \frac{x+z}{y} + \ln(xyz)$$

(Die stetige Differenzierbarkeit aller Funktionen sei vorausgesetzt.)

Aufgabe 7.2 Extrema, Sattelpunkte

Untersuchen Sie, für welche Werte des Parameters a die folgende Funktion Minima, Maxima oder Sattelpunkte besitzt (und wo):

$$f(x, y) = -x^3 + 6axy - y^3 \quad (a \neq 0)$$

Aufgabe 7.3 Kleinste Quadrate I

a) Durch die $n=3$ Messpunkte

x_i	1	4	6
y_i	2	4	8

ist eine optimale Funktion vom Typ

$$y = f(x) = k 2^{bx}$$

zu legen.

Hinweis: man logarithmiere die Werte, $z_i = \text{Id}(y_i)$, und entsprechend auch die Funktion f .

b) Zeichnen Sie Ihr Ergebnis, sowohl im logarithmierten Raum, als auch im Ursprungsraum.

Aufgabe 7.4 Lagerkostenfunktion

- a) Durch Lagerung und Transport zweier Produkte entstehen bei einer Bestellmenge

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

der beiden Produkte 1 und 2 Kosten von

$$K(\vec{x}) = \frac{4}{x_1} + \frac{12}{x_2} + 2x_1 + 5x_2 + 10$$

Bei welcher Bestellmenge $\vec{x} \in \mathbf{R}^2$ sind die Kosten minimal?

- b) Lösen Sie nun die gleiche Aufgabe für die allgemeinere Kostenfunktion mit beliebigen Konstanten a,b,c,d,e:

$$K(\vec{x}) = \frac{a}{x_1} + \frac{b}{x_2} + cx_1 + dx_2 + e$$

Welche Bedingungen müssen an die Konstanten a,b,c,d,e gestellt werden, damit die Aufgabe lösbar ist und damit am stationären Punkt ein Minimum ist?

Aufgabe 7.5 Tangentialebene und GradientGegeben seien die Funktionen $f(x,y) = y/x^2$ und $g(x,y) = x^2 y - 6xy + x^2 - 6x + 8y^2$.

- a) Man gebe für
- f
- und
- g
- die Tangentialebene und den Gradienten im Punkt
- $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0) = (1, 1)$
- an.

- b) Berechnen Sie über die totalen Differentiale
- df
- und
- dg
- , welche Änderung in den Tangentialebenen sich jeweils ergibt, wenn man zum Punkt
- $\mathbf{P}_1 = (x_1, y_1) = (1.1, 0.8)$
- übergeht. Stellen Sie diesen Näherungswerten die exakten Funktionsdifferenzen
- $\Delta f = f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)$
- und
- Δg
- gegenüber.

- c)
- ⁺
- Man überprüfe für die Funktion
- $f(x,y)$
- , dass der Gradient
- überall
- auf den Höhenlinien senkrecht steht.

Hinweis: Schreibe die Linien konstanter Höhe als Bahnkurven $(x(t), y(t))^T$ und differenziere (führt auf Tangentialvektor). Multipliziere nun mit dem Gradienten.

Aufgabe 7.6 Lagrange-Multiplikator 1

Wo liegen die Extrema von $Z(x,y) = x+2y$, wenn die Nebenbedingung $x^2+y^2=5^2$ einzuhalten ist?

- (a) Lösen Sie die Aufgabe über Eliminierung einer Variablen
- (b) Lösen Sie die Aufgabe mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren
- (c) Probe: Es sollte dasselbe herauskommen. Stimmt's? Welche Methode ist einfacher?
- (d) ⁽⁺⁾ Können Sie die Aufgabe auch graphisch lösen, fast ohne Rechnen?

Aufgabe 7.7 Lagrange-Multiplikator 2

Die Scheitelpunkte einer Ellipse sind diejenigen Punkte, deren Entfernung $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ vom Nullpunkt am größten bzw. am kleinsten ist. Bestimmen Sie die Scheitelpunkte der durch die Gleichung $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$ definierten Ellipse, deren Mittelpunkt ja im Nullpunkt liegt, mit der Methode von Lagrange.

Hinweis: Sie können sich die Rechnung ganz wesentlich erleichtern, wenn Sie beachten, dass d^2 die gleichen Extrempunkte hat wie d (!!)