Übungsblatt 11

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Aufgabe 11.1

- Geben Sie für das Zufallsexperiment: *Würfeln mit zwei unterscheidbaren homogenen Würfeln* den Merkmalraum an und die Wahrscheinlichkeit für „die Summe der Augenzahlen ist 5 oder 6“
- Sie verabreden mit einem Gegner ein aus mehreren Runden bestehendes Spiel, bei dem jeder zu Beginn den gleichen Einsatz bezahlt. Wer zuerst $n=10$ Runden gewonnen hat, erhält den ganzen Einsatz. Erfahrungsgemäß gewinnen Sie eine einzelne Runde mit Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$. Infolge widriger Umstände muss das Spiel vorzeitig abgebrochen werden, wobei Ihnen noch $i=3$ Runden und Ihrem Gegner noch $j=2$ Runden zum Gewinn fehlen. Werden Sie auf das Angebot Ihres Gegners, Ihnen 40% des Einsatzes zu überlassen, eingehen? Was halten Sie von dem Vorschlag, den Einsatz proportional zur Anzahl der bereits gewonnenen Partien zu verteilen? Lösen Sie das Problem mit Hilfe eines geeigneten Ereignisbaumes.
- Der Student S fährt 50% der Semestertage mit dem Bus. In 70% dieser Fälle kommt er pünktlich zur Fachhochschule. Durchschnittlich kommt er aber nur an 60% der Semestertage pünktlich an. Heute kommt S pünktlich zur Fachhochschule. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er den Bus benutzt?
- In einer Urne befinden sich zwei weiße und zwei schwarze Kugeln. Es werden nacheinander zwei Kugeln *)mit Zurücklegen **)ohne Zurücklegen gezogen. In welchem Fall sind die beiden Ereignisse A: „Weiß beim 1. Zug“ und B „Weiß beim 2. Zug“ voneinander stochastisch unabhängig?

Aufgabe 11.2

- Die Zufallsvariable X nehme die Werte x_i mit den Wahrscheinlichkeiten p_i wie in der Tabelle aufgeführt, an:

x_i	7	8	9	10	11	12
p_i	1/9	1/6	1/9	1/3	1/6	1/9

Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $V(X)$

- Eine homogene Münze werde zweimal geworfen. Geben Sie zunächst den Ereignisraum Ω an. Dieses Zufallsexperiment werde nun zu folgendem Glücksspiel verwendet. Man erhält 2 €, wenn zweimal Wappen fällt, 1 € bei einmal Wappen. Wenn zweimal Zahl fällt, muss man 2 € bezahlen. Die Zufallsvariable X gebe den Gewinn in € an. Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion F und daraus mit welcher Wahrscheinlichkeit man höchstens 1 € gewinnt. Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion und die Verteilungsfunktion graphisch dar. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz.

Aufgabe 11.3

In der Regel wird man beim Tippen einer Textseite die Seite nur zu 99% ohne Fehler tippen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in einem Buch mit 225 Seiten höchstens drei Seiten mit Druckfehlern finden lassen?

Aufgabe 11.4

Aus einer Lieferung von Schrauben werden 100 Stück zufällig herausgegriffen und der Durchmesser gemessen. Eine Schraube entspricht nicht der Norm, wenn ihr Durchmesser nicht in einer vorgeschriebenen Toleranz liegt. Bekanntermaßen beträgt der Ausschuss dieser Schraubenproduktion 3%

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den 100 Schrauben genau drei nicht der Norm entsprechende sind?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den 100 Schrauben höchstens vier nicht der Norm entsprechende sind?
- Wie viel nicht der Norm entsprechende Schrauben erwarten Sie unter 500 entnommenen Schrauben?

Aufgabe 11.5

- Eine Operation wird mit 80%igem Erfolg durchgeführt. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass bei 4 der nächsten 5 Patienten die Operation erfolgreich durchgeführt wird?
- Die Zufallsvariable X beschreibe die Verweildauer (in Tagen) eines zufällig ausgewählten Patienten in einem Krankenhaus. Der Erwartungswert $E(X)=10$ und die Standardabweichung $\sigma=4$ seien bekannt. Schätzen Sie mit Hilfe der Tschebyscheff'schen Ungleichung die Wahrscheinlichkeit ab, dass der Patient mehr als 5 Tage im Krankenhaus verweilt.

Aufgabe 11.6

Eine Abfüllanlage für 1-Liter-Flaschen ist auch auf 1 Liter eingestellt. Die Erfahrung zeigt, dass Toleranzen von $\sigma=5 \text{ cm}^3$ akzeptiert werden müssen und eine Normalverteilung vorausgesetzt werden darf. Wie groß ist der Anteil an fehlerhaft gefüllten Flaschen, wenn

- die Abfüllmenge höchstens 1010 cm^3 betragen darf
- die Menge nicht unter 992 cm^3 sinken darf
- die Abweichung von 1 Liter höchstens 7 cm^3 betragen soll?

Aufgabe 11.7

Es werden Stangen der mittleren Länge 1000 mm hergestellt. Die Grundgesamtheit sei normalverteilt. Die Standardabweichung sei 0,8 mm.

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Stange kürzer als 998 mm ist.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Stangenlänge im Intervall $[1000 \text{ mm}, 1002 \text{ mm}]$ liegt.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Abweichung der Länge vom Mittelwert absolut kleiner als 1 mm ist.
- Welcher bezüglich des Mittelwertes symmetrische Bereich der Längen lässt sich mit einer Sicherheit von 90 % garantieren?
- Wie groß müsste die Standardabweichung sein, wenn bei 90 % aller Stangen die Toleranzgrenzen von $\mu \pm 1,2 \text{ mm}$ eingehalten werden sollen?