

29.4.13 Komplexe Zahlen

Begründung zu D11-3

$$1) z_1 = z_2 \Leftrightarrow (a_1 + ib_1) = (a_2 + ib_2)$$

$$\Leftrightarrow a_1 - a_2 = i(b_2 - b_1)$$

$$\Rightarrow (a_1 - a_2)^2 = i^2 (b_2 - b_1)^2$$

$$\Leftrightarrow (a_1 - a_2)^2 = -(b_2 - b_1)^2$$

geht nur für 0 als Quadratzahl $\Rightarrow a_1 - a_2 = 0$
 $\wedge b_2 - b_1 = 0$

$$2) \underbrace{(a_1 + ib_1)}_{z_1} + \underbrace{(a_2 + ib_2)}_{z_2} = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

ist sinnvolle Def. für $z_1 + z_2$

$$3) z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + \underline{a_1 i b_2} + \underline{i b_1 a_2} + \underbrace{i^2 b_1 b_2}_{-1}$$
$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

ist sinnvolle Def. für $z_1 \cdot z_2$

Zur Übung

Vorüberlegung $z = \underline{a} + i\underline{b}$ b ist Imaginarteil
 $\Rightarrow z^* = a - ib$

$$z \cdot z^* = (a + ib)(a - ib) = a^2 + ib \cdot (-ib) + \underbrace{i(ba - ab)}_0$$
$$= \underline{a^2 + b^2}$$

$$|z| = \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{rein reell}$$

$$\text{ii2)} \quad |\underline{3} - \underline{4}i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \underline{\underline{5}}$$

$$\text{ii1)} \quad i(3 - 2i) = i3 - 2i^2 = 3i + 2 = \underline{2} + \underline{3}i$$

$$\text{ii3)} \quad \frac{(3+4i) \cdot (2+i)}{\underbrace{(2-i) \cdot (2+i)}_{z_2 \cdot z_2^*}} = \frac{3 \cdot 2 + 4i \cdot 2 + 3i + 4i^2}{2^2 + 1^2} = \frac{2 + 11i}{5}$$
$$= \underline{\underline{\frac{2}{5} + \frac{11}{5}i}}$$

Beweis der Eulersche Formel

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

e^z durch "Grundrechenarten" annähern:

Taylorpoly: $e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$
Sei $z = i\varphi$

$\Rightarrow$

$$e^{i\varphi} = 1 + \frac{i\varphi}{1!} + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \dots$$

$$= \underline{1} + \frac{i\varphi}{1!} + \underline{\frac{i^2\varphi^2}{2!}} + \frac{i \cdot i^2\varphi^3}{3!} + \underline{\frac{i^4\varphi^4}{4!}} + \dots$$

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \dots\right)}_{\cos \varphi} + i \underbrace{\left(\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \dots\right)}_{\sin \varphi}$$

Übung

$z = e^{i\varphi}$	$\operatorname{Re}(z) = \cos \varphi$	$\operatorname{Im}(z) = \sin \varphi$
e^{i0}	1	0
$e^{i\pi}$	-1	0
$e^{i2\pi}$	1	0
$e^{i\pi/2}$	0	1

