Rezept

Homogen lin DGL, n. Ordnung, konst Koeff.

$\downarrow$

Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$\downarrow$

n Lsg $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$\downarrow$

allg Lsg $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}$ (evtl komplex)

$\downarrow$

optional, falls λ_i komplex: eine spezielle reelle Lsg

$a \cdot \mathrm{Re}(e^{\lambda_1 t}) + b \cdot \mathrm{Im}(e^{\lambda_1 t})$

Übung 2

$\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 404\, x(t) = 0$, Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$

$\Leftrightarrow \lambda^2 e^{\lambda t} + 4\lambda e^{\lambda t} + 404 e^{\lambda t} = 0 \quad | : e^{\lambda t}$

$\Leftrightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 2^2 - 2^2 + 404 = 0 \quad |$ Quadr. Ergänzung

$\Leftrightarrow (\lambda + 2)^2 = -400$

$\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = -2 \pm 20i$

$x_1(t) = e^{\lambda_1 t} = e^{(-2+20i)t} = e^{-2t} e^{20it}$

allg Lsg $x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$

$= c_1 e^{-2t} e^{+20it} + c_2 e^{-2t} e^{-20it}$

$$\boxed{a e^{-2t} \cos(20t) + b e^{-2t} \sin(20t)}$$

alternative Form der allg. Lsg

Übung Anfangswertproblem

$\ddot{x}(t) - 9x(t) = 0$, (1) $\dot{x}(0) = 1$, (2) $x(0) = 0$

Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$

$\lambda^2 e^{\lambda t} - 9 e^{\lambda t} = 0 \quad | : e^{\lambda t}$

$\lambda^2 - 9 = 0 \iff \lambda^2 = 9 \iff \lambda_{1,2} = \pm 3$

allg. Lösung ist $\underline{\underline{x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-3t}}}$ $\Rightarrow x_1(t) = e^{3t}$, $x_2(t) = e^{-3t}$

mit bel. $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

Mit Anfangsbed. (1) u. (2) konkrete Werte für c_1, c_2:

$$x(0) = c_1 e^0 + c_2 e^{-0} = c_1 + c_2 \underset{\text{nach (2)}}{=} 0 \Rightarrow c_2 = -c_1$$

$$\dot{x}(t) = c_1 3e^{3t} + c_2(-3) \cdot e^{-3t}$$

$$\dot{x}(0) = 3c_1 - 3c_2 \underset{\text{nach (1)}}{=} 1 \quad (1')$$

Einsetzen von $c_2 = -c_1$ in $(1')$

$$3c_1 - 3(-c_1) = 1 \iff 6c_1 = 1 \iff c_1 = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow c_2 = -\frac{1}{6}$$

speziellen (eindeutigen) Lsg des AWP $\boxed{x(t) = \frac{1}{6} e^{3t} - \frac{1}{6} e^{-3t}}$

Beispiel 2 (Resonanzkatastrophe)

$$Q''(t) + 2\delta Q'(t) + \omega_0^2 Q(t) = K_0 e^{i\omega t}$$

Partikuläre inhomogene Lsg

$$Q_p(t) = A e^{i(\omega t - \varphi)}$$

$$Q_p'(t) = Ai\omega e^{i(\omega t - \varphi)}$$

$$Q_p''(t) = Ai^2\omega^2 e^{i(\omega t - \varphi)}$$

Einsetzen in DGL:

$$i^2\omega^2 A e^{i(\omega t - \varphi)} + i 2\delta\omega A e^{i(\omega t - \varphi)} + \omega_0^2 A e^{i(\omega t - \varphi)} = K_0 e^{i\omega t} \quad \Big| : e^{i\omega t}$$

$$-\omega^2 A e^{-i\varphi} + i\,2\delta\omega A e^{-i\varphi} + \omega_0^2 A e^{-i\varphi} = K_0 \qquad \Big| \cdot \frac{e^{i\varphi}}{A}$$

$$\underbrace{\omega_0^2 - \omega^2 + i\,2\delta\omega}_{\text{komplexe Zahl mit Betrag } \sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\delta\omega)^2}} = \underbrace{\frac{K_0 e^{i\varphi}}{A}}_{\text{komplexe Zahl mit Betrag } \frac{K_0}{A}}$$

$$\sqrt{\quad\ldots\quad} = \frac{K_0}{A}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{A = \frac{K_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\delta\omega)^2}}}$$

Wenn Dämpfung $(2\delta\omega)$ viel klein ist als $(\omega_0^2-\omega^2)$, dann wird Amplitude A für Frequenz ω in der Nähe von $\omega_0 = \frac{1}{LC}$ sehr groß

Beispiel Ball