Mathematik II : Teil 2 Schmitter 22.5.13

Analysis I $\quad y = f(x)$ explizit

$F(x,y) = 0$ implizit

Bp: Wurfparabel beim schiefen Wurf

$$W = W(\underbrace{\alpha, v_0}_{\text{2 Variablen}}) = \frac{2 v_0^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$$

Def: Funktion mit 2 unabhängigen Variablen

$$z = f(x,y)$$

abhängige Variable (z) $\quad$ x,y unabhängige Variablen

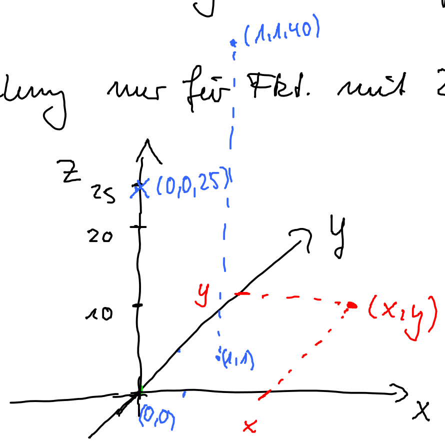
$$f: D \to \mathbb{R} : (x_1, \dots x_n) \longmapsto f(x) \in \mathbb{R} \qquad x = (x_1, \dots x_n)$$

$$D \subseteq \mathbb{R}^n$$

Bp: $z = f(x,y) = 10x + 5y + 25$ explizit

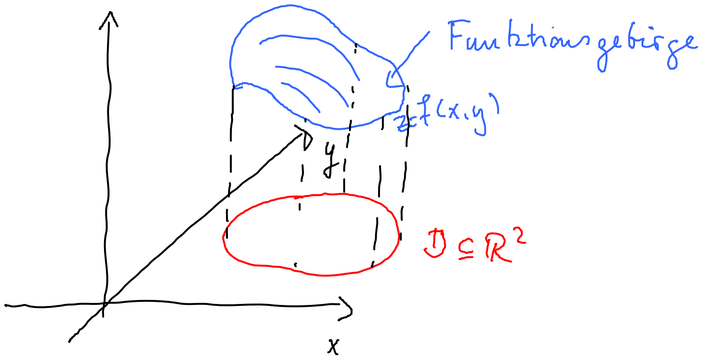
Graphische Darstellung nur für Fkt. mit 2 unabh. Variablen möglich

$D \subseteq \mathbb{R}^2$



Def.bereich ist die Ebene

Allgemein:



Darstellung von 3D-Funktionen mit Hilfe einer Tabelle:

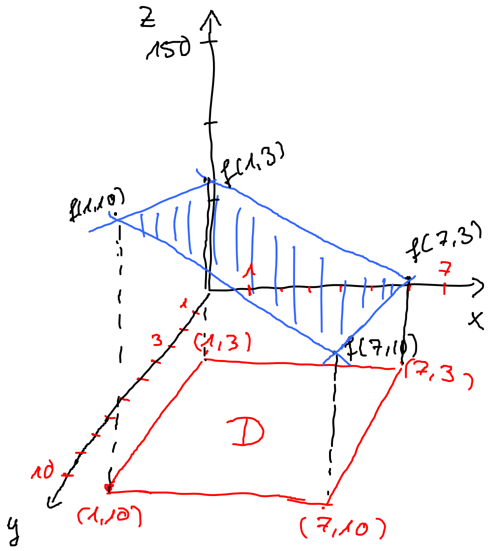
x \ y	y_1	y_2	y_3	...	y_n
x_1	z_{11}	z_{12}	z_{13}	...	
x_2		⋮			
⋮					
x_n					

$z_{11} = f(x_1, y_1)$

Bp: Ebene im Raum $\quad f(x,y) = ax + by + d \quad$ explizit

$ax + by + cz + d = 0 \quad$ implizit

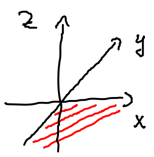
$f(x,y) = 110 - 10x + 5y \quad$ def. auf $\quad 1 \leq x \leq 7$, $\quad 3 \leq y \leq 10$



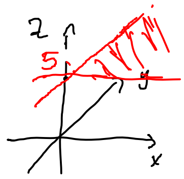
$f(1,3) = 115$
$f(7,3) = 55$
$f(7,10) = 90$
$f(1,10) = 150$

$\Big\}$ Werte an den Ecken des Def.ber.

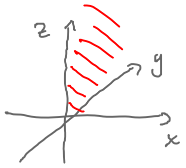
Bp.:



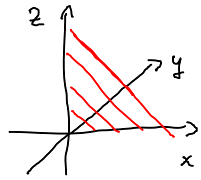
x,y-Ebene : $z = 0$



$z = 5$



z,y - Ebene : $x = 0$ hier analog!



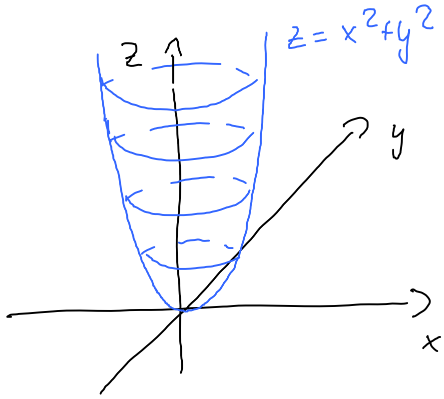
z,x - Ebene : $y = 0$

Nicht lineare 3D-Funktionen

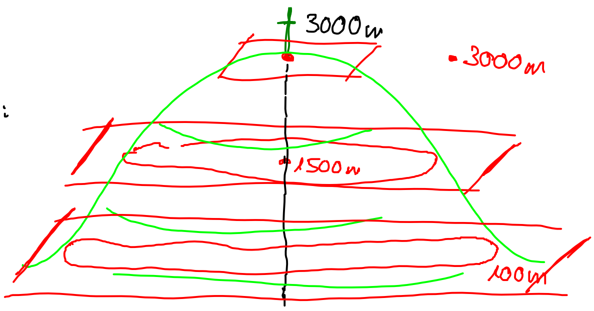
Bp: $z = 9 - 3x^3 + x \cdot y + 4y^2$

$z = x \cdot \sin y + y \cdot \cos x$

$z = x^2 + y^2$ Hinweis: Paraboloid!

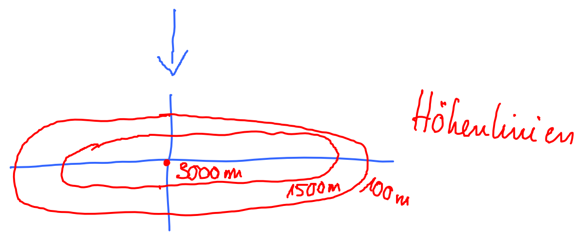


Schnittkurvendiagramme :



Def: Höhenlinien

Die Höhenlinien einer Fkt. $f(x,y) = z$ haben die Gleichung $f(x,y) = z_0$ z_0 konstant

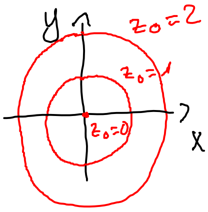


$z = x^2 + y^2$ Paraboloid

Höhenlinien : $x^2 + y^2 = z_0$ für $z_0 = 0$: $x^2 + y^2 = 0$ nur für $0,0$

$z_0 = 1$: $x^2 + y^2 = 1$

$z_0 = 4$: $x^2 + y^2 = 4$



Schnittkurven parallel zu den andern Koordinatenebenen:

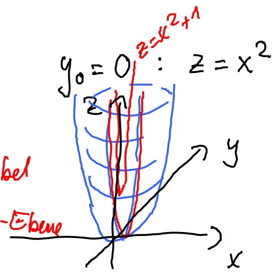
(y_0 konstant bzw. x_0 konstant)

$\underbrace{z = x^2 + y_0^2}$

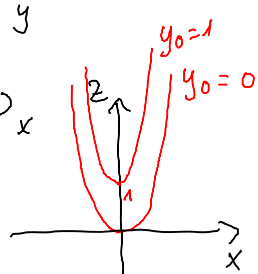
$z = x^2$ Normalparabel in der y,z-Ebene

$y_0 = 0$: $z = x^2$

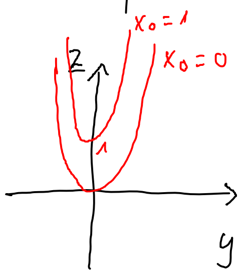
$z = x^2 + 1$



$z = x^2 + 1^2$ $y_0 = 1$



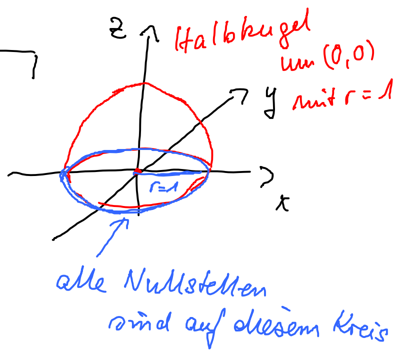
$z = x_0^2 + y^2$ x_0 konstant



Funktionseigenschaften

Nullstellen

$z = f(x,y)$ Bsp $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

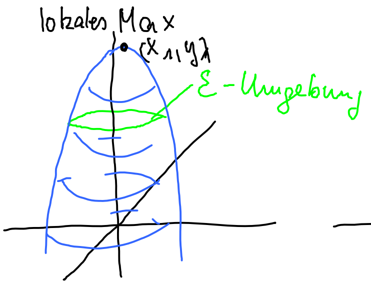


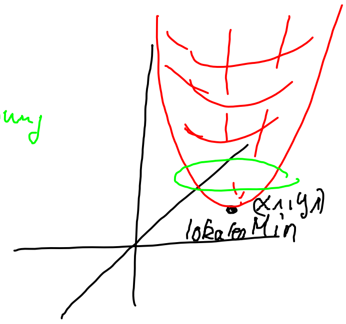
$f(x,y) = 0 \Rightarrow$ Nullstelle?

$\sqrt{1 - x^2 - y^2} = 0 \quad | \; (\;)^2$

$1 - x^2 - y^2 = 0 \iff x^2 + y^2 = 1$

Extremwerte :





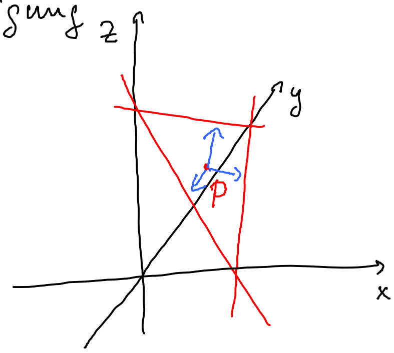
Eine Funktion $z = f(x,y)$ besitzt im Punkt (x_1, y_1) ein Max. bzw. Min.

$\Longleftrightarrow$ für alle (x,y) aus einer ε-Umgebung gilt:

$f(x,y) \leq f(x_1, y_1)$ (Max)

$f(x,y) \geq f(x_1, y_1)$ (Min)

Steigung



Aussage über eine Steigung einer 3D Funktion benötigt immer eine Richtungsangabe!

Allg. Def:

Die Steigung einer Fläche ist nach Festlegen einer Richtung die Steigung der Schnittkurve, die entsteht, wenn die Fläche in dieser Richtung "geschnitten" wird.

Vereinbarung: Schnittebenen parallel zu Achsenebenen!