Vorlesung 29.5.2013

Informationen zum Praktikum

Partielle Ableitungen zweiter Ordnung von $z = f(x,y)$

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} =: \text{Hesse Matrix}$$

Bp: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^2 x_3 + x_3$ $\quad x = (x_1, x_2, x_3)$

$f_{x_1}(x) = 3x_1^2$ $\quad f_{x_2}(x) = 2x_2 x_3$ $\quad f_{x_3} = x_2^2 + 1$

$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} 3x_1^2 \\ 2x_2x_3 \\ x_2^2+1 \end{pmatrix}$

$f_{x_1x_1} = 6x_1$ $\quad f_{x_2x_1} = 0$ $\quad f_{x_3x_1} = 0$

$f_{x_1x_2} = 0$ $\quad f_{x_2x_2} = 2x_3$ $\quad \boxed{f_{x_3x_2} = 2x_2}$

$f_{x_1x_3} = 0$ $\quad \boxed{f_{x_2x_3} = 2x_2}$ $\quad f_{x_3x_3} = 0$

Hesse Matrix :
Funktionalmatrix

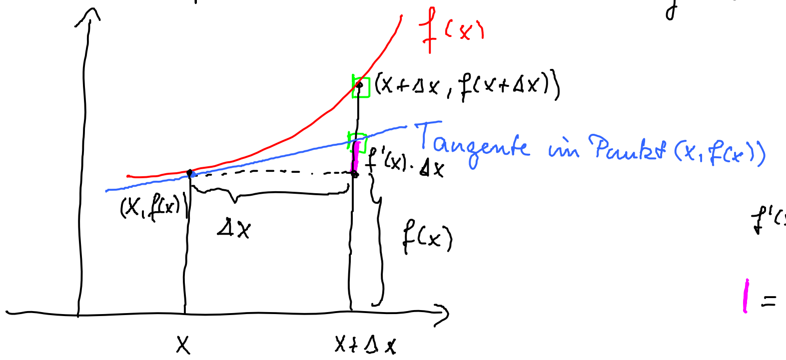
$$\begin{pmatrix} 6x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2x_3 & 2x_2 \\ 0 & 2x_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Wert des Gradienten für $a = (1,2,3)$: $\operatorname{grad} f(1,2,3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$

" der Hesse-M. " " : $H(1,2,3) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Partielles und totales Differenzial : Linearisierung von Funktionen

Wdh: Fkt. m. 1 Variablen



$f'(x) = \frac{|}{\Delta x}$ | Länge des lila Abschnitts

$| = f'(x) \cdot \Delta x$

$f(x+\Delta x) \cong f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$ Linearisierung einer Funktion

Übertrag auf 3D-Raum : $z = f(x,y)$

$$dz_x = f_x \cdot dx$$
$$dz_y = f_y \cdot dy$$

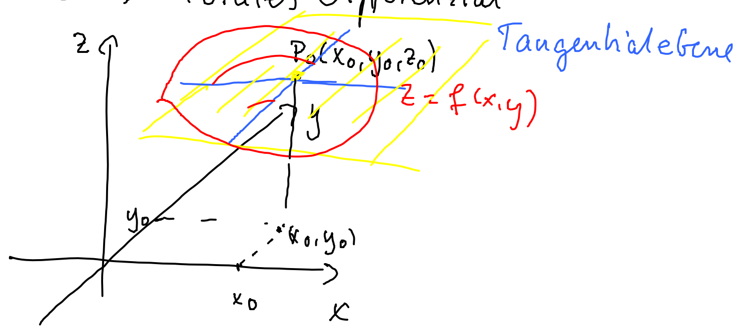
partielle Differenziale

auch zu übertragen auf Funktionen mit n Variablen

Ziel : die partiellen Differenziale sollen zu einem gesamten Differenzial für mehrdimensionale Funktionen zusammengefasst werden!

$\rightarrow \; \ldots \; \rightarrow$ totales Differenzial

$z = f(x,y)$



Gleichung der Tangentialebene : $z = ax + by + c$ a, b, c zu berechnen

$z_x = a$ $\quad f_x(x,y)$

$z_y = b$ $\quad f_y(x,y)$

im Berührpunkt $P_0(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$: $a = f_x(x_0, y_0)$, $b = f_y(x_0, y_0)$

P_0 liegt auch auf der Tang.ebene:

$$z_0 = a x_0 + b y_0 + c \quad \Rightarrow \quad c = z_0 - a x_0 - b y_0$$

$$\Rightarrow \quad c = z_0 - f_x(x_0, y_0) \cdot x_0 - f_y(x_0, y_0) \cdot y_0$$

damit ist $z = f_x(x_0, y_0) \cdot x + f_y(x_0, y_0) \cdot y + z_0 - f_x(x_0, y_0) \cdot x_0 - f_y(x_0, y_0) \cdot y_0$

Umformen ergibt: $z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

Def: Das totale Differenzial

$$z = f(x,y)$$

$$dz = f_x\, dx + f_y\, dy$$

Änderung der Höhenkoordinate, wenn statt der Fkt. die Tangentialebene genommen wird: Linearisierung

$$z = f(x_1, \dots, x_n)$$

$$dz = f_{x_1} dx_1 + f_{x_2} dx_2 + \dots + f_{x_n} dx_n$$

Bp: $z = f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$

$$f_x(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$f_y(x,y) = \quad = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$dz = \frac{2x}{x^2+y^2} \cdot dx + \frac{2y}{x^2+y^2} \cdot dy \qquad \text{totale Differenzial}$$

Geg.: $P_0(2,1) \longrightarrow P_1(2{,}5\,;\,1{,}75)$

in x,y-Ebene

d.h. $dx = 0{,}5 \qquad dy = 0{,}75$

$$dz = \frac{2 \cdot 2}{2^2+1^2} \cdot 0.5 + \frac{2 \cdot 1}{2^2+1^2} \cdot 0.75 = 0{,}7$$ näherungsweise berechnete Änderung der Höhenkoordinate

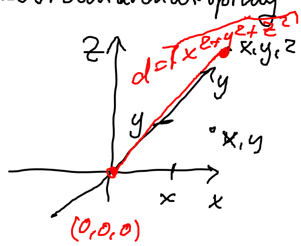
Vergleich mit der wahren Änderung:

$$\Delta z = \left| f(2,1) - f(2{,}5\,,\,1{,}75) \right| = \left| \ln(4+1) - \ln(2.5^2 + 1.75^2) \right|$$

$$= \dots = 0{,}62$$

Bp: $r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ Abstand des Punktes vom Koordinatenursprung

$P(x,y,z)$ im 3D-Raum (Definitionsraum!)



$A(1,2,0) \longrightarrow B(0{,}9\,,\,2{,}2\,,\,-0{,}1)$

Berechnung über das totale Differential:

$$dr = r_x\,dx + r_y\,dy + r_z\,dz$$

$$r_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$r_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$r_z = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$dr = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot dy + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \left(x \cdot dx + y \cdot dy + z\,dz \right)$$

$A(1,2,0)$

$dx = -0{,}1$ $\quad dz = -0{,}1$

$dy = +0.2$

$$dr(x,y,z) = dr(1,2,0) = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+0^2}} \left(1 \cdot -0{,}1 + 2 \cdot 0.2 + 0 \cdot -0{,}1 \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(-0{,}1 + 0.4 \right) = 0{,}1342$$

Zum Vergleich die wahre Abstandsänderung:

$$\left| r(1,2,0) - r(0{,}9\,,\,2{,}2\,,\,-0{,}1) \right| = 0{,}1430$$

Extremwerte bei Funktionen mit mehreren Variablen $z = f(x_1, \dots, x_n)$

Notwendige Bedingung

$$f_{x_1} = f_{x_2} = f_{x_3} = \dots f_{x_n} = 0 \quad \text{für den Kandidaten}$$

notwendig : Lösung eines in der Regel <u>nicht linearen</u> GS

liefert dann "Kandidaten" für Extremwerte

Hinreichende Bedingungen

1) $n = 2$ $\quad z = f(x,y)$ $\quad (x_0,y_0)$ Extremwert?

$$f_x(x_0,y) = f_y(x_0,y_0) = 0$$

$$\Delta = f_{xx}(x_0,y_0) \cdot f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}^2(x_0,y_0) = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

$f_{xx}(x_0,y_0) < 0 \Rightarrow$ Max

$f_{xx}(x_0,y_0) > 0 \Rightarrow$ Min

sonst keine Entscheidung möglich