5.6.2013

Lösung von Extremwertaufgaben mit Hilfe der Methode von Lagrange

Lagrange (1736 – 1813)

Multiplikatorenregel von Lagrange
für mehr als 2 Variablen
für mehr als 1 Nebenbedingung

z.B. für $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$ (Abstand zur z-Achse)

Nebenbed. 1: $x^2+y^2+z^2=1$ (Punkt auf Kugel um 0 mit $r=1$)

$x+y+z=0$ (Punkt auf dieser Ebene)

Prinzip (Vorstellung für Fkt. mit 2 Variablen)

geg: $z = f(x,y)$ unter der NB: $g(x,y)=0$

(muss in der impliziten Form vorliegen)

Lagrange-Methode:

Die Extremwerte von $z=f(x,y)$ unter NB $g(x,y)=0$ liegen genau an den Stellen, wo

$$V(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y)$$

λ Lagrange-Multiplikator

Aus einer Fkt. mit 2 Variablen wird eine Fkt. mit 3 Variablen!

Berechnung des Extremwertes der Lagrange-Fkt:

$$\text{I} \quad V_x = f_x(x,y) + \lambda \cdot g_x(x,y) = 0$$

$$\text{II} \quad V_y = f_y(x,y) + \lambda \cdot g_y(x,y) = 0$$

$$\text{III} \quad V_\lambda = g(x,y) = 0$$

Die partielle Ableitung nach λ liefert die NB!

Aus I und II folgt: $\lambda = \frac{-f_x}{g_x}$ und $\lambda = -\frac{f_y}{g_y}$

$$\Leftrightarrow -\frac{f_x}{g_x} = -\frac{f_y}{g_y} \Leftrightarrow f_x \cdot g_y - f_y \cdot g_x = 0$$

Methode nach Lagrange immer dann, wenn die NB nicht nach einer der beiden Variablen aufzulösen ist!

Bp: $z = f(x,y) = -x^2 - \frac{1}{2}y^2 + 4 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}_+^2$

$$g(x,y) = 2 - 2x - y = 0$$

$$v(x,y,\lambda) = -x^2 - \frac{1}{2}y^2 + 4 + \boxed{\lambda}\underbrace{(2 - 2x - y)}_{g(x,y)=0}$$

Extremwertbestimmung von $v(x,y,\lambda)$: Kandidaten

Notwendige Bedingungen

$$\text{I} \quad v_x = -2x - 2\lambda = 0$$

$$\text{II} \quad v_y = -y - \lambda = 0$$

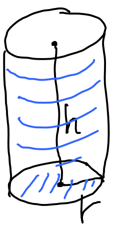
$$\text{III} \quad v_\lambda = 2 - 2x - y = 0 \qquad (= \underbrace{g(x,y)}_{=0})$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Aus I:} & 2x = -2\lambda \Rightarrow \lambda = -x \\ \text{Aus II:} & \lambda = -y \end{array}\right\} \Rightarrow x = y \quad *$$

$* $ in $\underline{III}$: $2-2x-x=0 \iff 3x=2 \iff x=\frac{2}{3}$

Kandidat: $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$

Bp: In einer Fabrik werden oben offene Dosen mit r und h (Radius und Höhe) hergestellt. Wie müssen r und h gewählt werden, damit mit V = 1 l der Materialverbrauch am geringsten ist?



Oberfläche: $f(r,h) = \pi \cdot r^2 + 2\pi r \cdot h$

$g(r,h) = \pi \cdot r^2 \cdot h - 1000 = 0$

~~Formelsammlung~~
~~$Ob = 2\pi r(r+h)$~~
~~$2\pi r^2 + 2\pi r h$~~

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 1000$

$1L = 1000\,cm^3$

$V(r,h,\lambda) = \pi \cdot r^2 + 2\pi r h + \lambda(\pi r^2 h - 1000)$

$V_r(r,h,\lambda) = 2\pi r + 2\pi h + 2\lambda\pi r h = 0 \quad \underline{I}$

$V_h(r,h,\lambda) = 2\pi r + \lambda \pi r^2 = 0 \quad \underline{II}$

$V_\lambda(r,h,\lambda) = \pi r^2 \cdot h - 1000 = 0 \quad \underline{III}$

Aus $\underline{II}$: $2\pi r = -\lambda \pi r^2 \iff -\lambda = \frac{2\pi r}{\pi r^2} \iff \lambda = -\frac{2}{r}$

Aus $\underline{I}$ mit $\lambda = -\frac{2}{r}$: $2\pi r + 2\pi h + 2 \cdot -\frac{2}{\cancel{r}} \cdot \pi \cdot \cancel{r} \cdot h = 0$

$\iff 2\pi r + 2\pi h - 4\pi h = 0$

$\iff 2(\pi r - \pi h) = 0 \iff \pi r = \pi h$

$\iff h = r \quad *$

$*$ in $\underline{III}$: $\pi r^2 \cdot r - 1000 = 0$

$\pi r^3 = 1000 \iff r^3 = \frac{1000}{\pi} \iff r = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$

Damit: $r = h = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}} = 6{,}828\ cm$

Die Methode von Lagrange bei Fkt. mit n unabh. Variablen und k NB

$$X = (x_1, \dots, x_n) \qquad \lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_k)$$

$$\underbrace{L(x_1 \dots x_n, \lambda_1 \dots \lambda_k)}_{n+k \text{ Variablen}} = f(x_1 \dots x_n) + \lambda_1 g_1(x_1 \dots x_n) + \lambda_2 g_2(x_1 \dots x_n) + \dots + \lambda_k g_k(x_1 \dots x_n)$$

Notwendige Bedingungen:

es müssen $n+k$ partielle Ableitungen 1. Ordnung gebildet werden!

$$L_{x_i} \qquad i = 1, \dots, n$$

$$L_{\lambda_j} \qquad j = 1, \dots k$$

$$L_{x_i} = 0$$

$$L_{\lambda_j} = 0$$ (das sind die k Nebenbedingungen)

Lösungen dieses GS: $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$

Kandidaten für Extremwerte

$$L_{x_i}(x, \lambda) = f_{x_i}(x) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \, g_{j x_i}(x) = 0$$

$$L_{\lambda_j}(x, \lambda) = g_j(x) = 0$$

Hinreichende Bedingung für Extremwerte für eine Fkt. mit n Variablen und einer Nebenbedingung:

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda \cdot \underbrace{g(x_1, \dots x_n)}_{1 \text{ NB}}$$

Notwendig: $L_{x_1} = L_{x_2} = \dots L_{x_n} = 0 \qquad L_\lambda = 0$

$x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ ist

lokales Maximum, falls $G_2 > 0,\ G_3 < 0, \dots G_n \begin{cases} >0 & n \text{ gerade} \\ <0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$

lokales Minimum, falls $G_2 < 0,\ G_3 < 0, \dots G_n < 0$

Nebenbed. $g_{x_1} = L_{\lambda x_1}$

mit $G_2 = \begin{vmatrix} L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} & g_{x_1} \\ L_{x_2x_1} & L_{x_2x_2} & g_{x_2} \\ g_{x_1} & g_{x_2} & 0 \end{vmatrix}$ $\dots$ $G_n = \begin{vmatrix} L_{x_1x_1} & \dots & L_{x_1x_n} & g_{x_1} \\ \vdots & & & \vdots \\ L_{x_nx_1} & \dots & L_{x_nx_n} & g_{x_n} \\ g_{x_1} & \dots & g_{x_n} & 0 \end{vmatrix}$

Bp: $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}$

$g(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 - 3a = 0$

$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} + \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 3a)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{I}: L_{x_1} = \frac{1}{2\sqrt{x_1}} + \lambda = 0 \\ \text{II}: L_{x_2} = \frac{1}{2\sqrt{x_2}} + \lambda = 0 \\ \text{III}: L_{x_3} = \frac{1}{2\sqrt{x_3}} + \lambda = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 \quad *$$

$\text{IV}: L_\lambda = x_1 + x_2 + x_3 - 3a = 0$

$*$ in IV : $x_1 = x_2 = x_3 = a$ Kandidat: (a, a, a)

$L_{x_1x_1} = -\frac{1}{4} x_1^{-\frac{3}{2}}$ $\quad L_{x_1x_2} = 0$ $\quad L_{x_1x_3} = 0$

$L_{x_2x_1} = 0$ $\quad L_{x_2x_2} = -\frac{1}{4} x_2^{-\frac{3}{2}}$ $\quad L_{x_2x_3} = 0$

$L_{x_3x_1} = 0$ $\quad L_{x_3x_2} = 0$ $\quad L_{x_3x_3} = -\frac{1}{4} x_3^{-\frac{3}{2}}$

$$g_{x_1} = 1 \qquad g_{x_2} = 1 \qquad g_{x_3} = 1$$

$$G_2 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{4}x_1^{-3/2} & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{4}x_2^{-3/2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} \frac{1}{4}x_2^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}x_1^{-\frac{3}{2}}$$

$$G_3 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{4}x_1^{-3/2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{4}x_1^{-3/2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4}x_3^{-3/2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}x_1^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{4}x_2^{-3/2} + \frac{1}{4}x_3^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$\left.\begin{matrix} G_2(a,a,a) > 0 \\ G_3(a,a,a) < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{lokales Maximum bei } (a,a,a)$$

HA (für Übung Montag)

Eingangsbeispiel mit der Methode v. Lagrange berechnen (Kandidaten)

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$g_1: \ x^2+y^2+z^2 = 1$$

$$g_2: \ x+y+z = 0$$

Interpretation des Lagrange-Multiplikators

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{L(x,y,\lambda) - f(x,y)}{g(x,y)}$$

λ ist der Differentialquotient der Funktion L nach der Funktion g

λ infinitesimale Änderungsrate der Funktion L bei Variation der Nebenbedingung