

12.6.2013

Graphentheorie

Routenplanung

Telefonnetz

Wasserleitungsnetz

Bp: n Gäste

Kontrahenten: zwei Gäste, die sich nicht mögen!

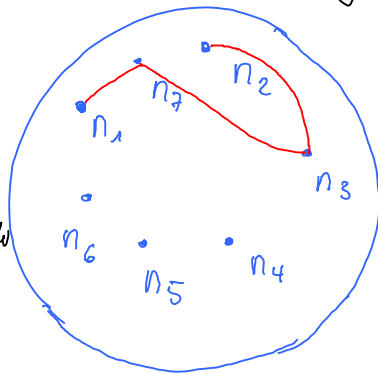
dürfen daher auch nicht nebeneinander sitzen!

Lösung durch "Graphentheoretiker":

Er malt n Punkte, jeder Punkt sei ein Gast

Bp: $n = 7$

Zwei Punkte werden verbunden,
wenn die Gäste nebeneinander
sitzen können



System: Graph

Aufgabe: Jeder Punkt nur einmal, "angefahren" durch
eine geschlossene Linie

Suche eine Hamilton'sche Linie

Dagegen: Problem von L. Euler (1736)

"Brückenproblem"

Jede Kante (Brücke) nur einmal

Suche eine Eulersche Linie

Grundbegriffe

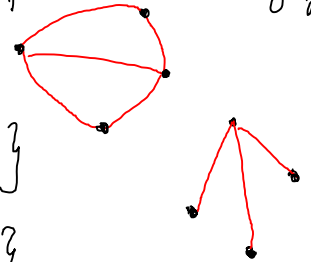
Def: Graph

Menge von Knoten : $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

Menge von Kanten : $K = \{k_1, \dots, k_m\}$

Abbildung $v : K \rightarrow M : v(k_i) \mapsto (x_i, x_j)$

Bp. für verschiedene Graphen



geordnetes Paar



Das Tripel : $G = (M, K, v)$ heißt Graph $\longleftrightarrow \{x_i, x_j\}$



(x_i, x_j) geordnetes Paar **Richtung!**

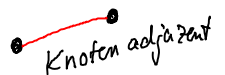
Man unterscheidet: gerichteter Graph : Digraph

ungerichteter Graph : gewöhnlicher Graph

Bp.

$x_1 \ x_2 \ x_3$
 $x_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
 x_2
 x_3

adjazente Knoten : sind durch eine Kante verbunden



inzident : heißt die Kante, die benachbarte Knoten verbindet

Adj.-matrix

Bp: $G = (M, K, v)$ mit $M = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$

$K = \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7\}$



$x_1 \ x_2 \ x_3$
 $k_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ Inzidenz-matr.

$k_2 \{0 \ 1 \ 1\}$
 alles später
 n.u.

$$V(k_1) = (x_1, x_2)$$

$$V(k_2) = (x_1, x_2)$$

$$V(k_3) = (x_1, x_3)$$

$$V(k_4) = (x_2, x_5)$$

$$V(k_5) = (x_3, x_5)$$

$$V(k_6) = (x_1, x_5)$$

$$V(k_7) = (x_4, x_4)$$

Zeichnung:

Knotengrad:

$$d(x_1^+) = 4 \quad d(x_1^-) = 0$$

$$d(x_2^+) = 1 \quad d(x_2^-) = 2$$

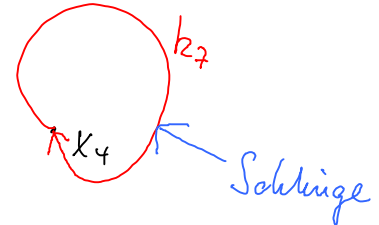
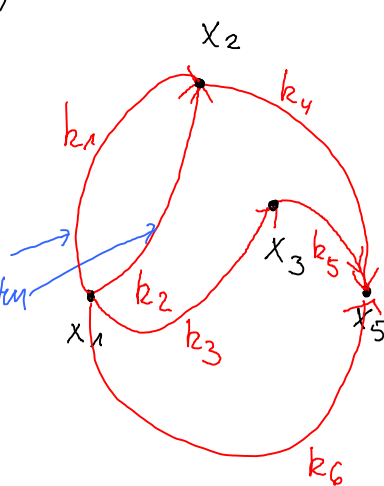
$$d(x_3^+) = 1 \quad d(x_3^-) = 1$$

$$d(x_4^+) = 1 \quad d(x_4^-) = 1$$

$$d(x_5^+) = 0 \quad d(x_5^-) = 3$$

$$d(x_6^+) = 0 \quad d(x_6^-) = 0$$

Mehrfachkanten



Isolierter Knoten

Def: G heißt schlicht, wenn es weder Schleifen noch Mehrfachkanten enthält.

Def: Kantenweg, Kantenzyklus

im Bsp: $k_1 k_4$ bzw. $k_3 k_5$ kein Kantenzyklus hier!

Def: Knotengrad

Die Anzahl der mit einem Knoten x_i inzidenten Kanten heißt der Grad $d(x_i)$

Schleifen haben den Knotengrad 2

Im Digraph: $d(x_i^+) =$ Anzahl der abgehenden Pfeile
 $d(x_i^-) =$ " " ankommende Pfeile

Def: Zusammenhängender Graph

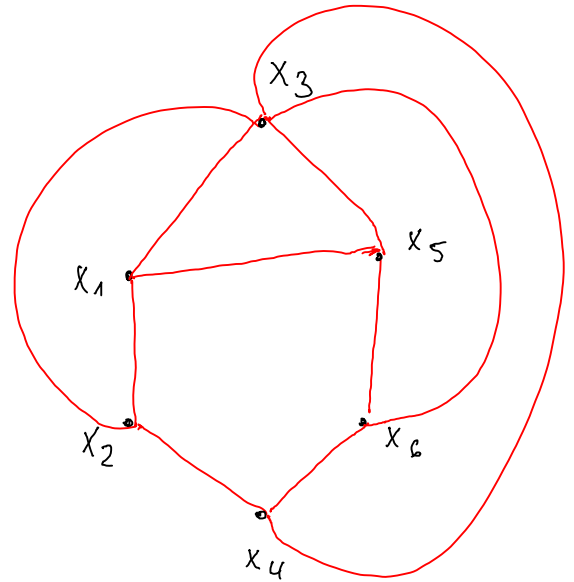
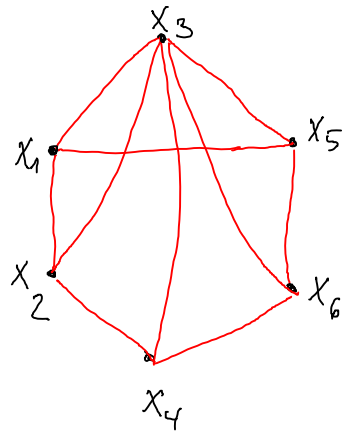
G gewöhnlicher Graph heißt zusammenhängend

$\Leftrightarrow$ Zu je zwei Knoten gibt es immer eine Kantenfolge, die diese verbindet

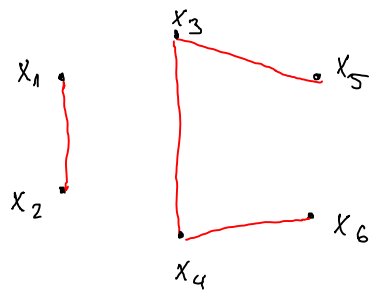
Zusammenhangskomponente

Bp:

Zusammenhängender Graph



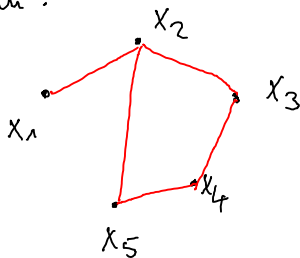
Kreuzungsfrei



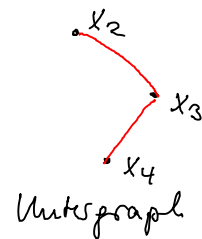
2 Zusammenhangskomponenten : Teilgraphen

Zu unterscheiden vom Untergraphen

Entfernen von Knoten und alle mit diesen Knoten inzidenten Kanten:



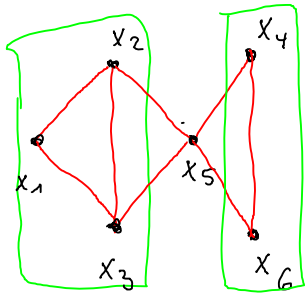
Weglassen
von x_1 und x_5



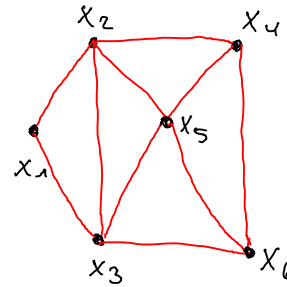
Merke: Teilgraph : es werden nur Kanten weggelassen, Knoten bleiben



Def: Trennende Knoten - Artikulationspunkte



x_5 ist Artikulationspunkt

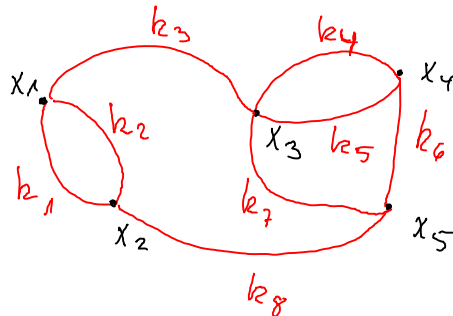


kein Artikulationspunkt

Bem: Artikulationspunkte sind z.B. in "Versorgungs"-Graphen wichtige, kritische Punkte

Def: Kantenfolge = Weg, Kreis, Zyklus

Bp:



Kantenfolge der Länge 6:

$k_8, k_7, k_5, k_4, k_5, k_6$

Kantenfolge der Länge 4:

k_2, k_1, k_3, k_5

Zyklus (Kreis) der Länge 4:

k_1, k_3, k_7, k_8

Def: Euler'sche Linie

Ein Kantenweg, der jede Kante eines Graphen genau einmal enthält, heißt Euler'sche Linie

Def: Hamilton'sche Linie

Ein Weg, der jeden Knoten eines Graphen genau einmal enthält, heißt Hamilton'sche Linie.

Bem: Eine Eulersche Linie existiert nur, wenn der Grad von höchstens zwei Knoten ungerade ist.

($\rightarrow$ Brückenproblem)