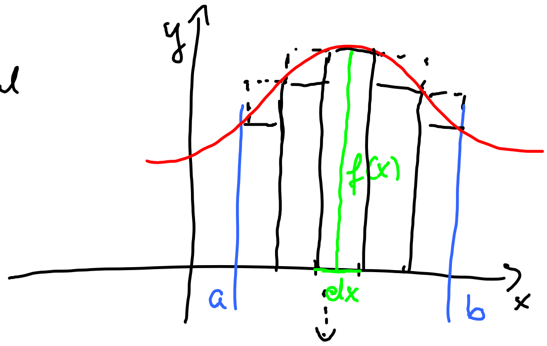
3.7.2013 letzte Vorlesung im SS 2013

Integralrechnung

Das bestimmte Integral



immer dünnere Rechtecke haben die Breite dx und die Höhe f(x)

$\sum$ Rechtecke $\rightarrow \int_a^b f(x)\cdot dx$

Das unbestimmte Integral

$f(x) \longrightarrow f'(x)$

$? \; f(x) \longleftarrow f'(x)$ Umkehrung der Differentiation

Stammfunktion $F(x)$

Aufsuchen einer Stammfunktion

Produktintegration = partielle Integration

hergeleitet aus der Produktregel

Bp: $\int_0^\pi a\cdot x^2\cdot \sin(x)\, dx$

$u = x^2$

$v' = \sin(x)$

$u' = 2x$

$v = -\cos(x)$

$\int uv' = uv - \int u'v$

$$= a\left[-x^2\cdot\cos(x) - \int 2x\cdot(-\cos(x))\,dx\right]$$

$$= a\left[-x^2\cdot\cos(x) + 2\underbrace{\int x\cdot\cos(x)\,dx}\right]$$

erneute partielle Integration

$u = x \qquad u' = 1$

$$x \cdot \sin(x) - \underbrace{\int \sin(x)\,dx}_{-\cos(x)} \qquad v' = \cos(x) \qquad v = \sin(x)$$

$$= a\left[-x^2\cos(x) + 2\left(x\cdot\sin(x) + \cos(x)\right)\right]_0^{\pi}$$

$$= a\left[-\pi^2\cos\pi + 2\left(\pi\cdot\sin\pi + \cos\pi\right) - \left(0 + 2\left(0\cdot\sin 0 + \cos 0\right)\right)\right]$$

$$= a\left(\pi^2 + 2(-1) - 2\right) = a\left(\pi^2 - 4\right)$$

Integration durch Substitution

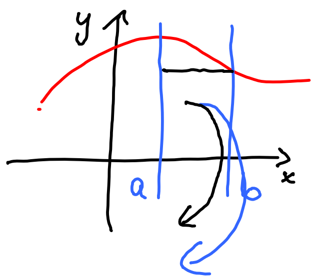
hergeleitet aus der Kettenregel

Bp: $\displaystyle\int_0^5 3a\cdot e^{3x}\,dx \qquad u = 3x \qquad \frac{du}{dx} = 3 \qquad du = 3dx$

$$= \int_{3\cdot 0}^{3\cdot 5} a\cdot e^u\,du = \left[a\cdot e^u\right]_0^{15} = a\cdot e^{15} - a\cdot e^0$$

$$= a\left(e^{15} - 1\right)$$

Rotationsvolumen



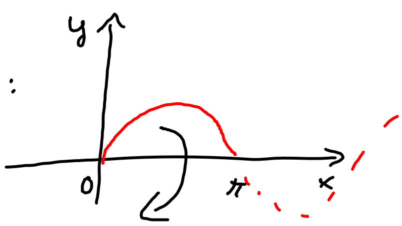
$$V_x = \pi\int_a^b \left[f(x)\right]^2\cdot dx$$

rotierendes Rechteck → Zylinderscheibe

dx ist also die Höhe der Zylinderscheibe

f(x) ist der Radius " "

Bp:



$$\pi\int_0^{\pi}\sin^2(x)\cdot dx = \pi\int_0^{\pi}\underset{u}{\sin(x)}\cdot\underset{v'}{\sin(x)}\,dx$$

partielle Integration

$$V_x = \pi\cdot\left[\sin(x)\cdot -\cos(x) + \int\cos(x)\cdot\cos(x)\,dx\right]$$

$$\int \cos^2(x)\,dx = \int (1-\sin^2(x))\,dx$$

$$\pi \int \sin^2(x)\,dx = \pi\left[-\sin(x)\cdot\cos(x) + x - \int \sin^2(x)\,dx\right]$$

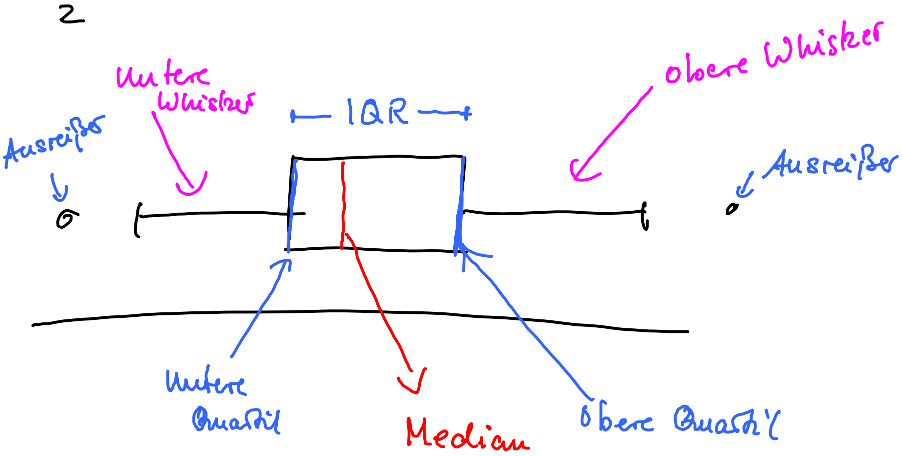
$$2\pi \int \sin^2(x)\,dx = \pi\left[-\sin(x)\cos(x) + x\right]_0^{\pi}$$

$$\pi \int \sin^2(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\left[-\pi \cdot \sin\pi \cdot \cos\pi + \pi - 0\right]$$

$$= \frac{\pi^2}{2}$$

Statistik

Boxplot



Wahrscheinlichkeitsrechnung

Binomialkoeffizient

Bernoulli-Experiment : 2 verschiedene Ausgänge

Binomialverteilung

Bp: In einer Schachtel befinden sich 50 Lose, 10 davon mit einem Gewinn. Man kauft 5 Lose. Wie groß ist die W., dass mindestens 2 der 5 gewinnen? (Lose werden wieder zurückgelegt)

$p = 0{,}2 \quad q = 1 - 0{,}2 = 0.8$

$n = 5$

X Zva: gibt die Anzahl der Gewinne

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$$

Binomial-koeffizienten im Taschenrechner

$\binom{5}{1} \Rightarrow 5 \text{ nCr } 1 = (\text{ENTER})$

$$= 1 - [P(X=0) + P(X=1)]$$

$$= 1 - \left[\binom{5}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^5 + \binom{5}{1} \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^4\right]$$

$$= 0{,}2672$$

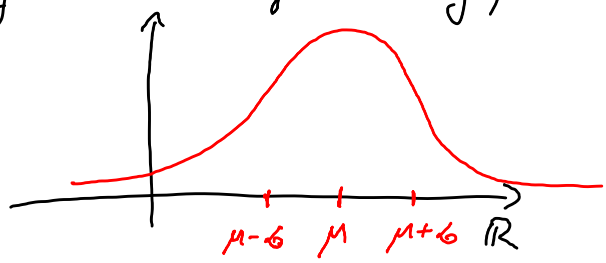
Binomialverteilung: n, p

Merke $E(X) = \mu = n \cdot p$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)}$

Normalverteilung (stetige Verteilung)

μ, σ



$\downarrow$

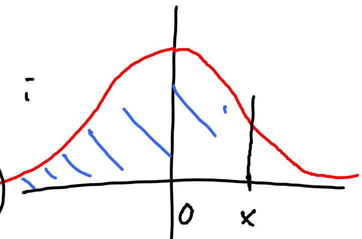
Standardnormalverteilung

X normalverteilt $\rightarrow U = \frac{X-\mu}{\sigma}$ Φ

standardnormalverteilt mit $\mu = 0$, $\sigma = 1$

In der Tabelle:

$\Phi(x) = P(U \leq x)$



$\Phi(0) = P(U \leq 0) = 0{,}5$

$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

Symmetrie!

Bp: Für eine normalverteilte Zufallsgröße gelte $\mu = 50$ und $P(X > 58{,}8) = 0{,}33$

Welchen Wert hat σ?

$$P(X > 58{,}8) = 1 - \underbrace{P(X < 58{,}8)}_{P(X < 58{,}8) = 0{,}67} = 0{,}33$$

$$\Phi\left(\frac{X-50}{\sigma}\right) = 0{,}67$$

Tabelle: zu 0.67 gehört (am Rand abzulesen) das Quantil: 0.44

$$\frac{X-50}{\sigma} = 0.44$$

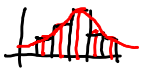
$$\frac{58{,}8-50}{\sigma} = 0.44 \Rightarrow \sigma = 20$$

Hinweis: Falls Zva binomialverteilt ist, z.B. $n = 500$ $p = 0{,}2$

Frage $P(X \leq 100)$

dann Grenzwertsatz von DeMoivre-Laplace

dazu $\mu = n \cdot p$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ berechnen



dann ist z.B.

$$P(a \leq X \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b-\mu+0.5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu-0.5}{\sigma}\right)$$

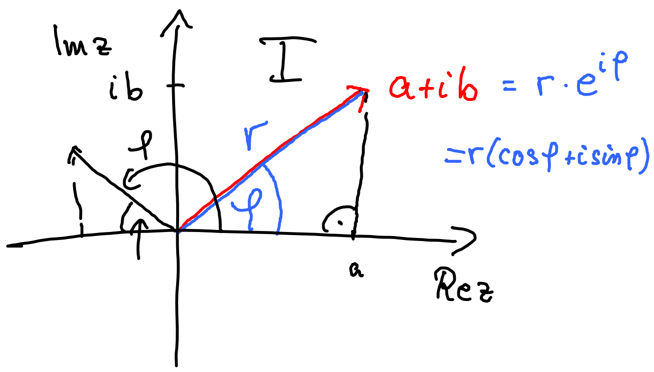
Komplexe Zahlen

$$\sqrt{-1} = i$$

$$z = a + ib$$

a: Realteil $\mathrm{Re}\,z$

ib: Imaginärteil $\mathrm{Im}\,z$



Potenzieren und Radizieren in der Eulerform bzw. trig. Form

$$|z| = r = \sqrt{\mathrm{Re}\,z^2 + \mathrm{Im}\,z^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{\mathrm{Im}\,z}{\mathrm{Re}\,z}$$ (Achtung: Lage von z Quadrant beachten)

Potenzieren ^{k}: Betrag potenzieren ^{k} Winkel $\cdot k$

Wurzelziehen: k-te Wurzel: $\sqrt[k]{\text{Betrag}}$: Winkel: 1) $\frac{\varphi}{k}$

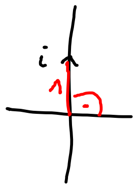
2) $\frac{\varphi}{k} + \frac{2\pi}{k}$

3) $\frac{\varphi}{k} + \frac{2 \cdot 2\pi}{k}$

Bp: $z^5 = i$ also $\sqrt[5]{i}$

$z_1 = i = 0 + 1 \cdot i$

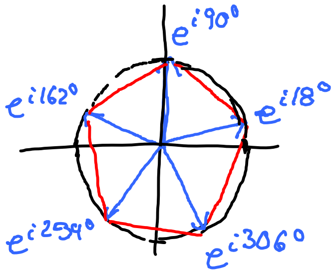
$|z_1| = |i| = 1$ $\varphi = 90°$



etc.
bis k Wurzeln erreicht

1\. Wurzel: $\sqrt[5]{1} \cdot e^{i18°}$

2\. Wurzel: $\sqrt[5]{1} \cdot e^{i18° + 72°} = e^{i90°}$



Differentialgleichungen

Bp: $y' = y^2 \cdot \sin(x)$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \cdot \sin(x)$$ Trennung der Variablen

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \sin(x)\,dx$$ $\frac{1}{y^2} \to y^{-2} \to -y^{-1}$

$$-\frac{1}{y} = -\cos(x) + C$$ $| \cdot y \quad : -\cos(x) + C$

$$y = \frac{1}{\cos x - C}$$ Falls Anfangswert gegeben $y(\pi) = 2$

$$2 = \frac{1}{\cos\pi - C} \Rightarrow \frac{1}{2} = \cos\pi - C$$

$$\Rightarrow C = \cos\pi - \frac{1}{2} = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

Lösung $$y = \frac{1}{\cos x + \frac{3}{2}}$$

Viel Glück und Erfolg!