Graphentheorie

Teilgebiet der Mathematik

Systeme von Objekten und Beziehungen

Beschreibung von Verbindungen

zwischen Objekten

Verkehrsnetze, Kommunikationsnetze,

Betriebs- oder Produktionsstrukturen

Graphentheorie

Graphen, die bekannt sein sollten:

Pfeildiagramme

Gozintographen

Graphentheorie

Beispiel

Verteilung von n Gästen an einem Tisch, so, dass nirgends zwei Kontrahenten nebeneinander sitzen.

Graphentheorie

Löst der Gastgeber das Problem mit der Graphentheorie, dann muss er eine geschlossene Linie so finden, dass diese durch jeden Punkt nur Einmal hindurchgeht!

Aufsuchen einer Hamiltonschen Linie

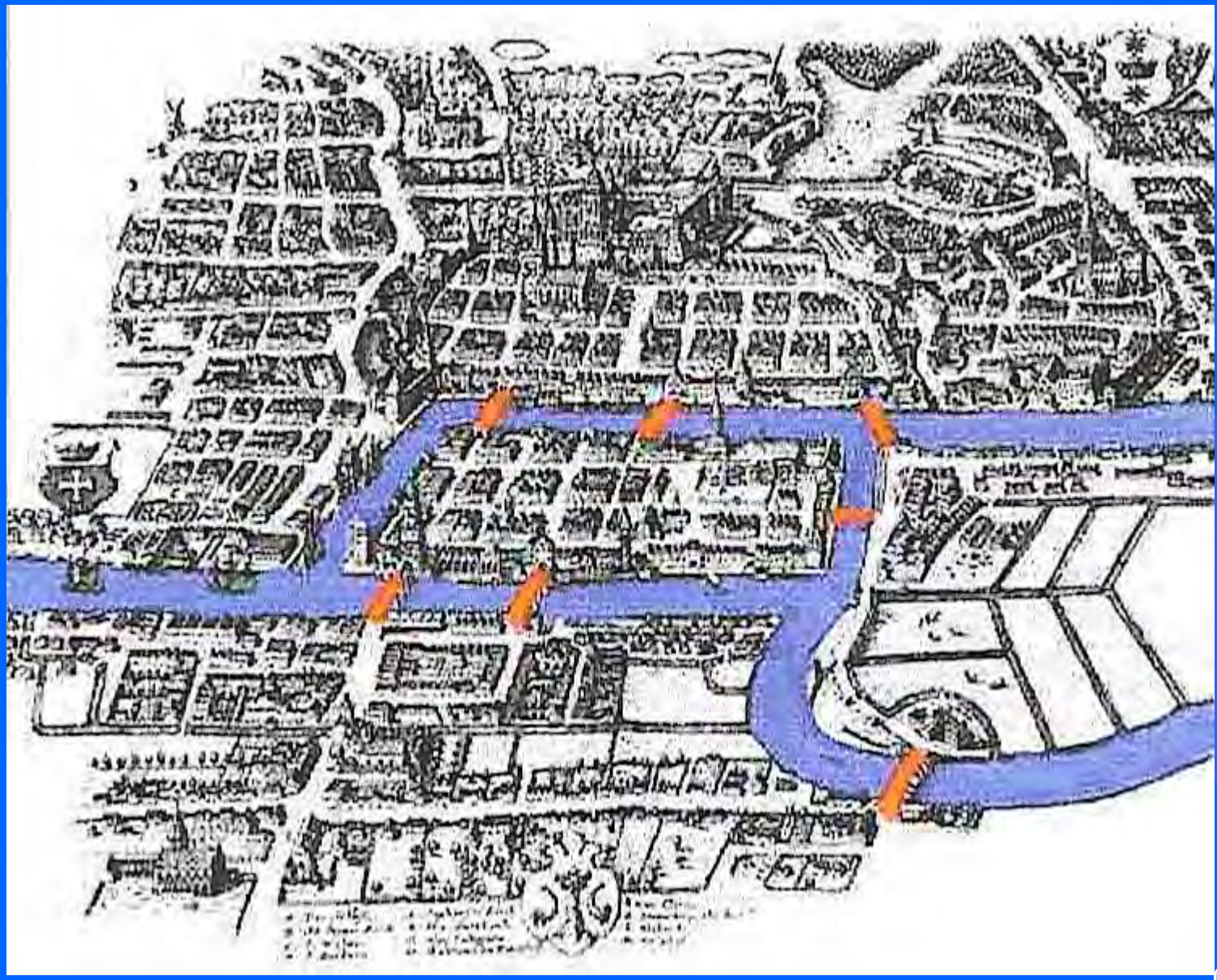
Graphentheorie

Beispiel

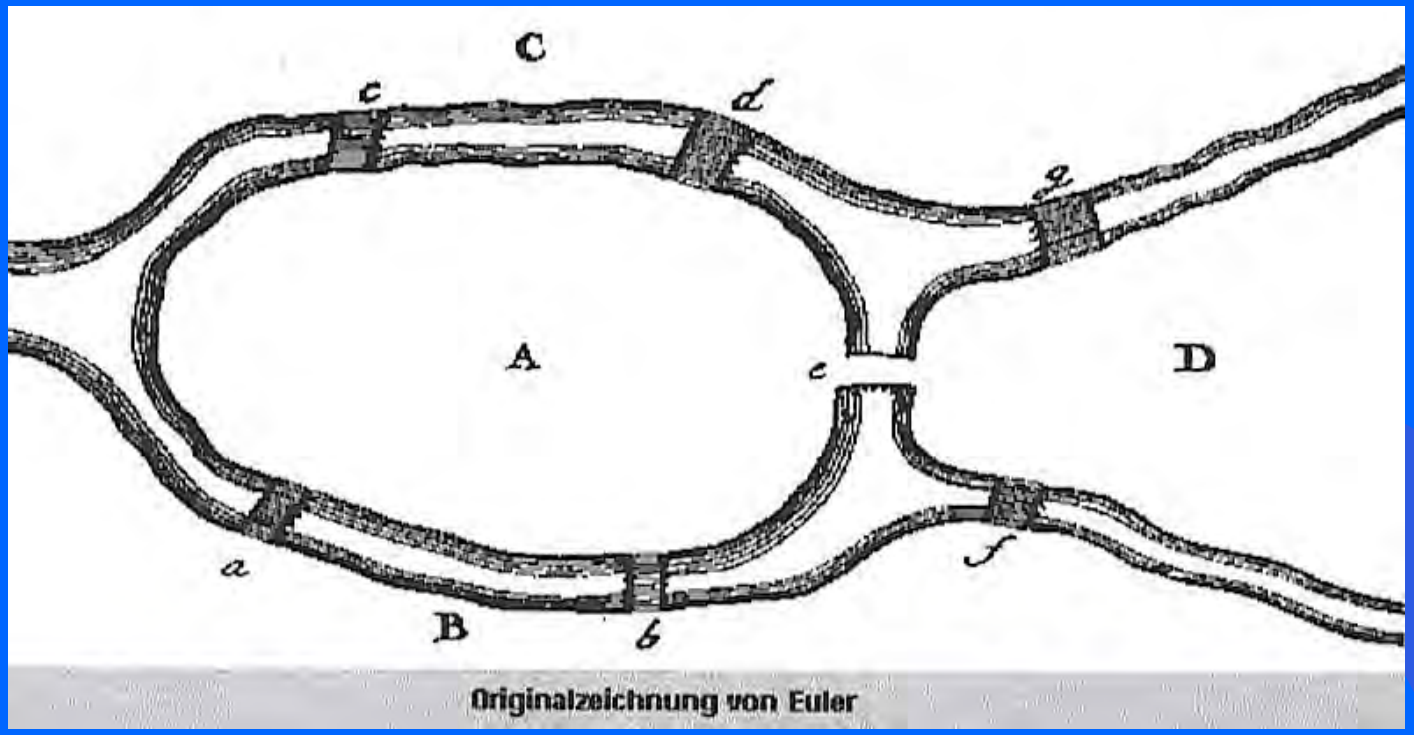
Leonard Euler 1736

Brückenproblem

Graphentheorie

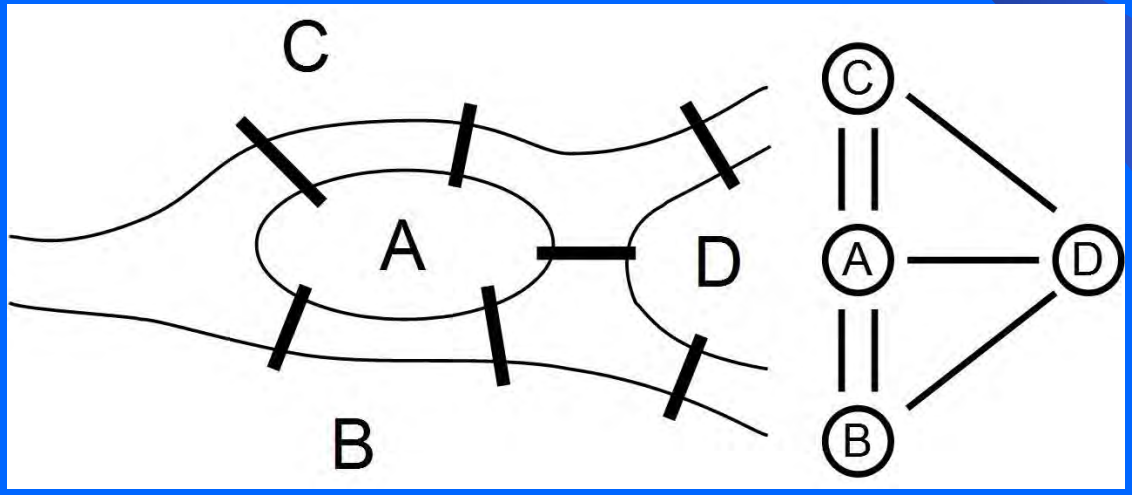


Graphentheorie



Originalzeichnung von Euler

Graphentheorie



Graphentheorie Grundbegriffe

Def.: Graph

G=(M,K,v)

M Menge von Knoten

K Menge von Kanten

v Abbildung, die zwei Knoten eindeutig eine Kante zuordnet

Graphentheorie Grundbegriffe

Knotenpaare geordnet:

Gerichteter Graph – Digraph

Knotenpaare ungeordnet:

Ungerichteter Graph

Graphentheorie Grundbegriffe

Zwei durch eine Kante vebundene Knoten heißen

adjazent

Die Kante, die zwei benachbarte Knoten verbindet, heißt dann

inzident

Graphentheorie Grundbegriffe

Beispiel

Schlingen

Mehrfachkanten

Schlichter Graph

Kantenzyklus

Graphentheorie Grundbegriffe

Def.: Knotengrad

Anzahl der Kanten, die in einem Knoten ansetzen

(Achtung: Digraph, hier ist zwischen ankommenden und abgehenden Kanten zu unterscheiden:

Ausgangsgrad und Eingangsgrad

Schlingen zählen 2

Graphentheorie Grundbegriffe

Def.: zusammenhängender Gaph

Ein gewöhnlicher Graph (ungerichteter Graph) heißt zusammenhängend, wenn es zu je zwei Knoten stets eine Kantenfolge (Weg) gibt.

Zusammenhangskomponente Z(x) eines Knotens x: Menge der Knoten y, für die es einen Weg von x nach y gibt.

Bildet zusammen mit den inzidierenden Kanten einen TEILGRAPHEN

Beispiele

Graphentheorie Grundbegriffe

Def.: Untergraph

Erhält man aus einem Graphen, in dem man Knoten entfernt, sowie alle mit diesen Knoten inzidierenden Kanten.Anzahl der Kanten, die in einem Knoten ansetzen

Dagegen Teilgraph: entsteht aus einem Graphen, indem nur Kanten weggelassen werden.

Graphentheorie Grundbegriffe

Def.: Trennende Knoten, Artikulationspunkte

Nach Herausnahme eines Artikulationspunktes zerfällt der Graph in mehrere Zusammenhangskomponenten

Def.: Kantenfolge, Weg, Eulersche Linie, Hamiltonsche Linie

Bem: Eine Eulersche Linie exisitiert nur, wenn der Grad von höchstens zwei Knoten ungerade ist.

Graphentheorie Grundbegriffe

Isomorphe Graphen

Def.: Bijektive Abbildung zwischen Knoten und Kanten zweier Graphen

Die Isomorphie ermöglicht es, die Eigenschaften eines Graphen auf andere isomorphe Graphen zu übertragen

Graphentheorie Grundbegriffe

Def.: Baum

Folgende Aussagen sind äquivalent: G ist ein Baum

- ⇔ **Zwischen je zwei Knoten enthält G genau einen Weg**
- ⇔ **G ist minimalzusammenhängend, d.h. falls eine Kante entfernt wird, ist der Restgraph nicht mehr zusammenhängend.**

Graphentheorie Grundbegriffe

Sind in einem Baum die Knotengrade von allen Knoten kleiner oder gleich 2, entsprechend in einem gerichteten Baum die Knotengrade stets 2 oder 0, dann spricht man von einem Binärbaum.

Ein Wurzelbaum ist ein Digraph, ein Baum, bei dem ein Knoten als Wurzel gewählt wird und jede Kante durch einen Pfeil ersetzt wird, der von der Wurzel wegweist.

Beispiele

Graphentheorie Grundbegriffe

Def.: Länge und Höhe eines Wurzelbaums

Länge: Maximalwert unter den Abständen (Länge des Weges zwischen zwei Knoten in einem Wurzelbaum)

Höhe: Anzahl der Knoten des längsten Weges

Knotenzahl in Binärbäumen mit Höhe H ist maximal N = 2^H-1 Knoten

Graphentheorie

Huffman-Code

Wichtige Anwendung der Binärbäume in der Graphentheorie

Notwendiger Begriff: Präfixcode

Eräuterung an einem Beispiel

Graphentheorie Grundbegriffe

Def.: Gerüst, aufspannender Baum

Ein zusammenhängender Teilgraph eines zusammenhängenden Graphen G mit minimaler Kantenzahl heißt Gerüst oder aufspannender Baum.

Graphentheorie Grundbegriffe

Def.: Bewerteter Graph

Jeder Kante in einem Graphen wird einer reelle Zahl zugeordnet

Diese Zahlen repräsentieren Kosten, Kapazitäten, Häufigkeiten, Wahrscheinlichkeiten, unterschiedlich, je nach Anwendungsgebiet.

Graphentheorie Grundbegriffe

Def.: Adjazenzmatrix

Def.: Inzidenzmatrix

Bedeutung der Adjazenzmatrix:

Aussagen über die Existenz und Anzahl von Pfeilfolgen in gerichteten Graphen

Graphentheorie Grundbegriffe

Bedeutung der Adjazenzmatrix:

Mit Hilfe der Adjazenz-Matrix und ihrer Potenzen kann man Informationen über die Anzahl und die Länge von Pfeilfolgen in Digraphen erhalten. Ebenso kann man Informationen darüber gewinnen, ob in einem Graphen Zyklen existieren.

Beispiel

Graphentheorie Grundbegriffe

Wegematrix:

Summiert man die Adjazenzmatrix und ihre Potenzen auf und ersetzt die Elemente ungleich Null durch eine 1, so erhält man die Wegematrix, die folgende Information enthält: Es existieren Wege von Knoten i nach Knoten j, über die Länge wird dann nichts mehr ausgesagt.

Graphentheorie Grundbegriffe

Matching

Ein Matching in einem Graphen ist eine Menge unabhängiger Kanten, die paarweise nicht „adjazent“ sind, d.h. ein Knoten ist nicht mit zwei verschiedenen Knoten verbunden

Maximales Matching

Perfektes Matching

Beispiel

Graphentheorie Durchlaufen von Graphen

Gerüste : minimal zusammenhängende Teilgraphen bei gewöhnlichen Graphen

Hilfsmittel:

Tiefensuche

Breitensuche

Graphentheorie Durchlaufen von Graphen

Bei bewerteten Graphen (Digraphen):

Minimal aufspannender Baum:

Summe der Kantengewichte ist minimal

Graphentheorie

Auffinden minimal aufspannender Bäume:

Algorithmus von Kruskal:

1) **Suche Kante mit dem kleinsten Gewicht**
2) **Suche nächste Kante mit dem kleinsten Gewicht, falls sie einen Kreis bildet -> verwerfen, wenn nicht, weiter mit 2), dabei immer auf den Zusammenhang achten**

Graphentheorie

Bestimmung kürzester Wege in ungerichteten und gerichteten bewerteten Graphen

-von einem Knoten zu allen anderen Knoten:

„single source shorest paths“

- **Zwischen je zwei Knoten:**

„all pairs shortest paths“

Graphentheorie

Algorithmus von Dijkstra

Vorstellung an einem Beispiel

Graphentheorie

Das Maximalflußproblem

Ausblick:

Flüsse und Schnitte in Graphen

Netzwerk

Fluss