

Differenzialrechnung für Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen

Graphentheorie

Differenzialrechnung für Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen

Def.: eine Funktion

$$f : D \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad D \subset \mathbb{R}^n, x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$$

heißt eine Funktion mit n unabhängigen Variablen

Spezialfall: $n=2$

Darstellungsformen für $n=2$

1) Analytische Darstellung :

$$z=f(x,y) \text{ (explizit)}$$

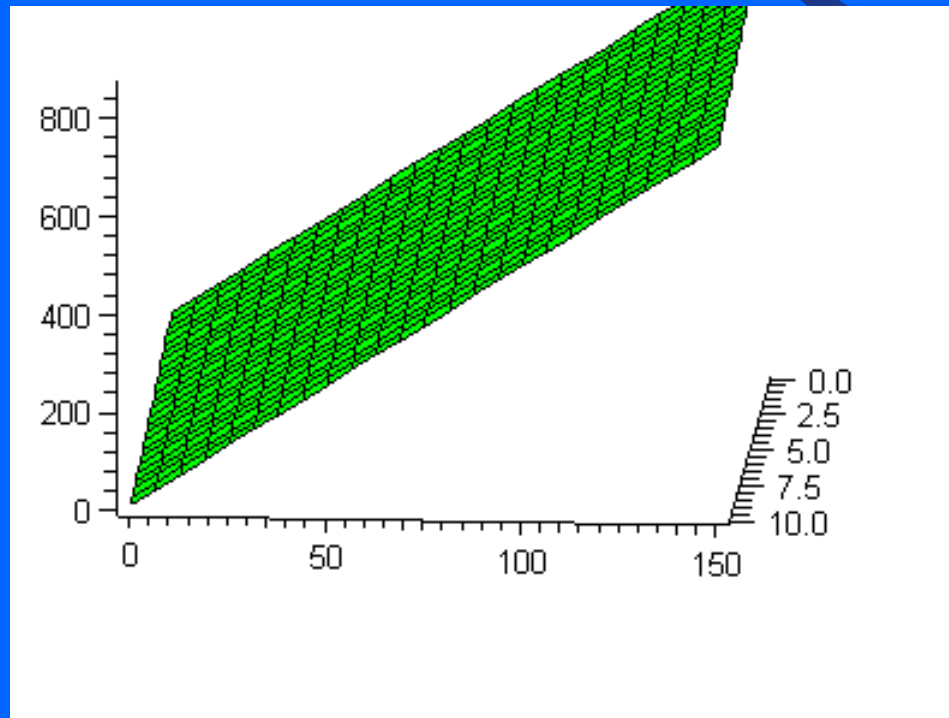
$$F(x,y,z)=0 \text{ (implizit)}$$

2) Funktionstabelle

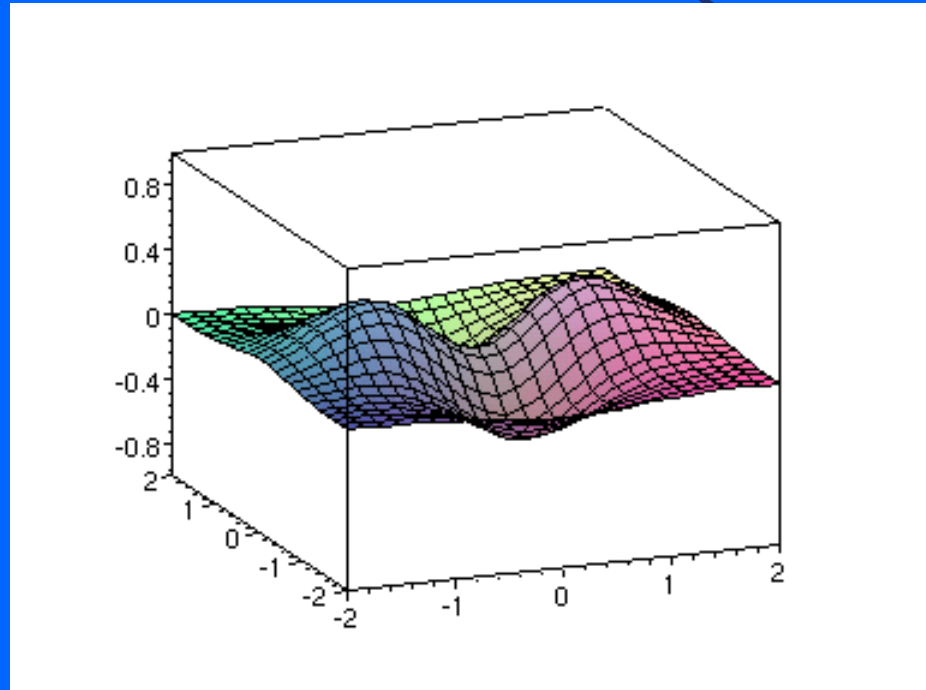
3) Graphische Darstellung

Graphische Darstellung

Beispiele: $f(x,y)=110-10x+5y$



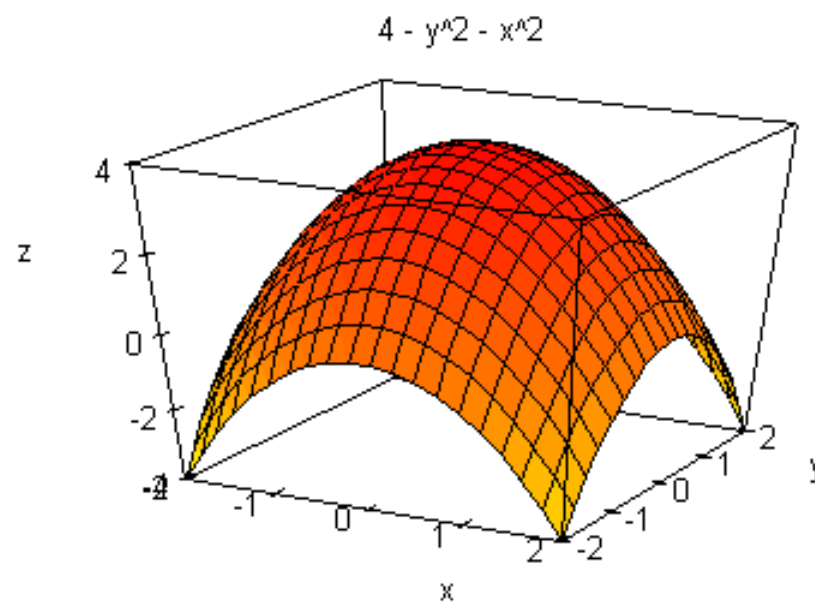
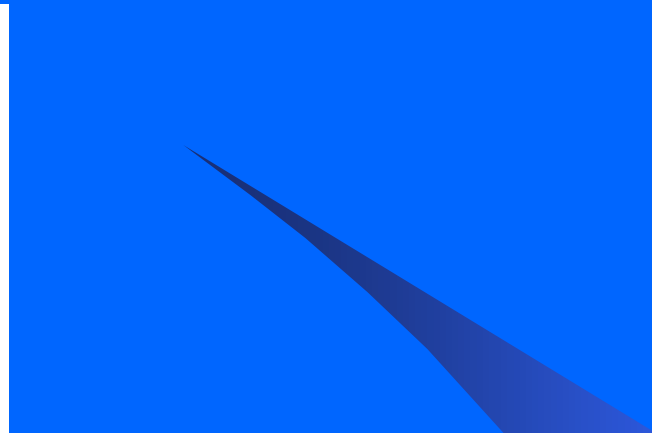
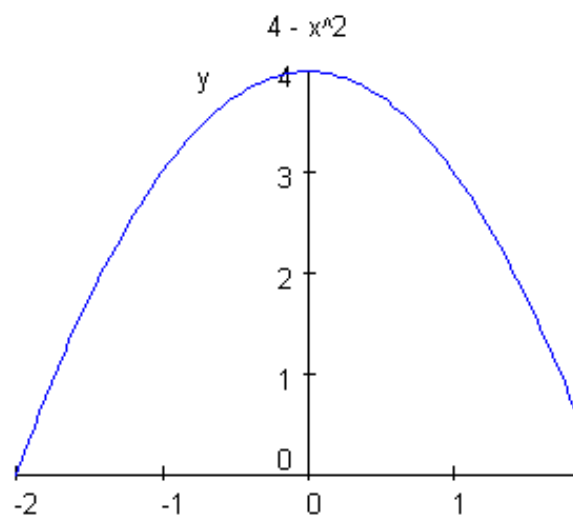
Funktionsgebirge



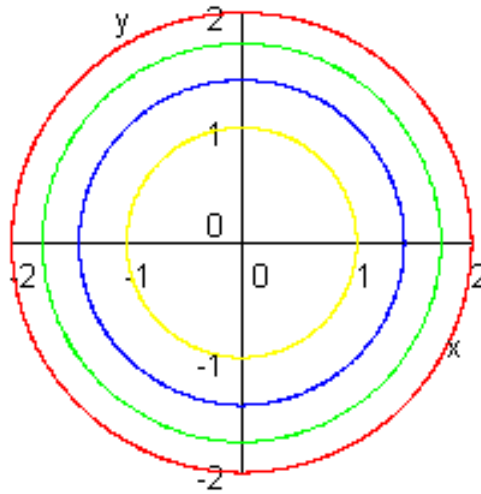
Höhenlinien und Schnittkurvendiagramme

zur plastischen Darstellung sogenannter
3D- Funktionen

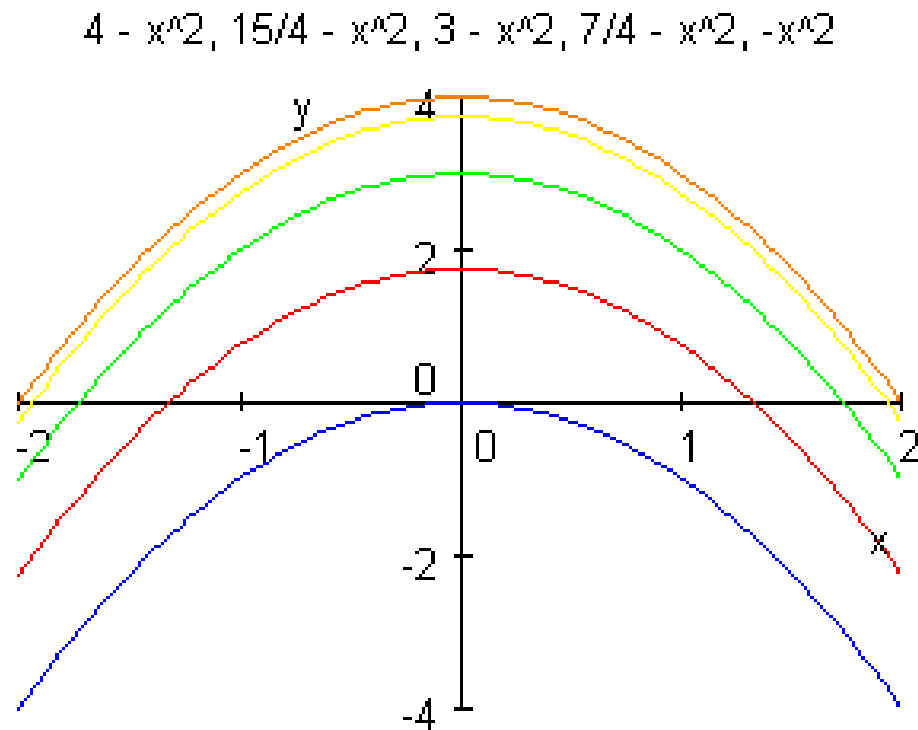
Bp. Paraboloid



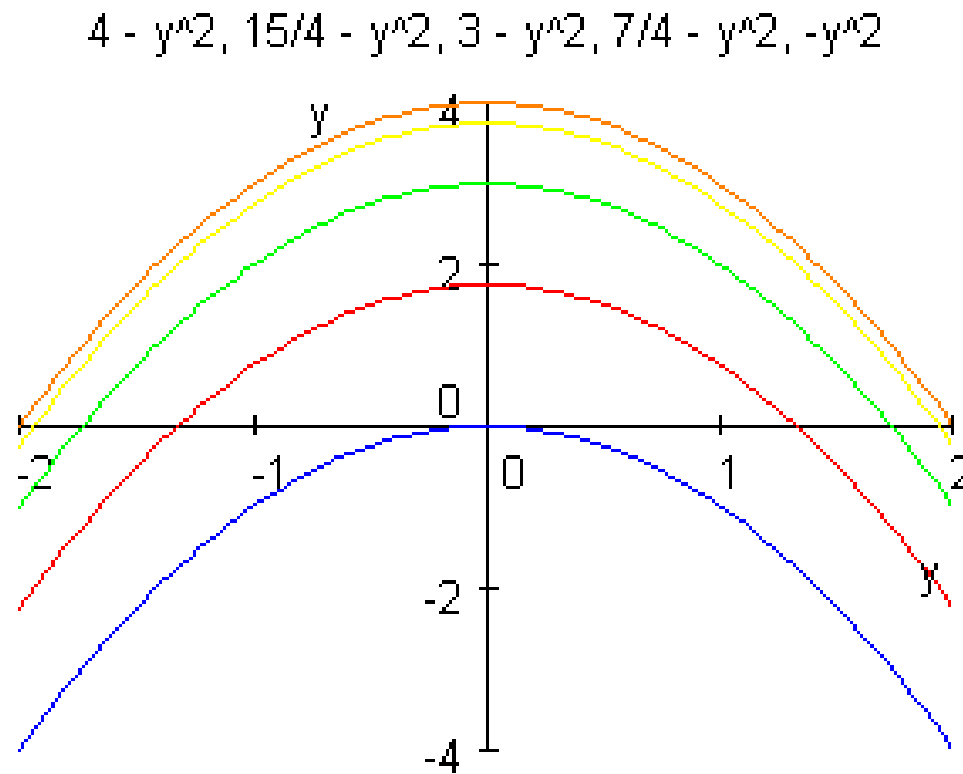
Höhenlinien



Schnittkurvendiagramm 1



Schnittkurvendiagramm 2



Funktionseigenschaften mehrdimensionaler Funktionen

Nullstellen

Extremwerte

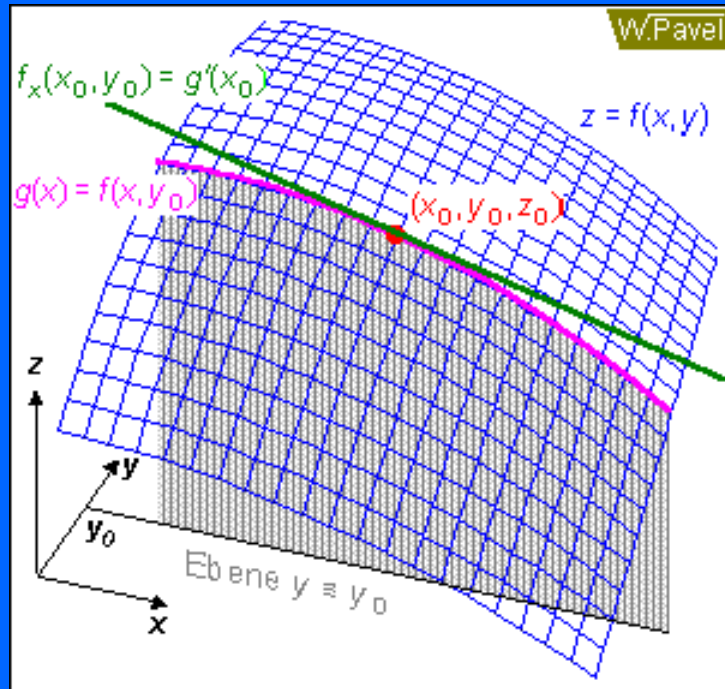
Steigung

Partielle Ableitungen 1.Ordnung

bei Funktionen mit mehreren Veränderlichen ist es nicht mehr eindeutig möglich, die Steigung zu bestimmen.

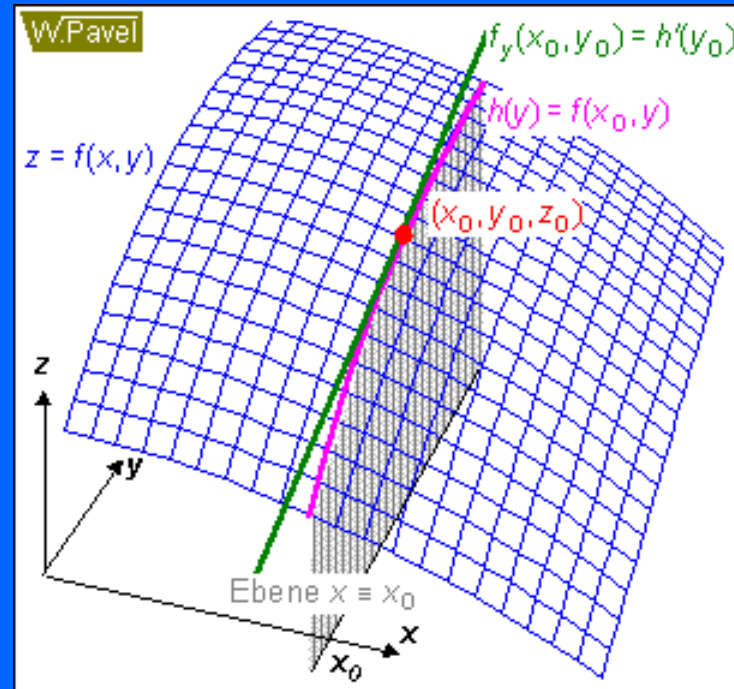
Es ist notwendig, zusätzlich die Richtung anzugeben und dann die Steigung der Schnittkurve in dieser Richtung zu berechnen

Partielle Ableitungen 1.Ordnung



Partielle Ableitung nach x der Funktion $z = f(x, y)$
im Punkt $(x, y, z) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) = g'(x_0) \text{ mit } g(x) = f(x, y_0)$$



Partielle Ableitung nach y der Funktion $z = f(x, y)$
im Punkt $(x, y, z) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = h'(y_0) \text{ mit } h(y) = f(x_0, y)$$

<http://bilderbuch.mathematik.uni-wuerzburg.de/themen/totdiff.htm>

Partielle Ableitungen 1.Ordnung

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = f_x(x, y)$$

Partielle Ableitung der Funktion $f(x,y)$ nach x

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = f_y(x, y)$$

Partielle Ableitung der Funktion $f(x,y)$ nach y

Partielle Ableitungen 1.Ordnung für Funktionen mit n unabhängigen Variablen

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i} = f_{x_i}(x_1, \dots, x_n)$$

Partielle Ableitung der Funktion $z = f(x_1, \dots, x_n)$ nach der i-ten Variablen

Partielle Ableitungen 1.Ordnung für Funktionen mit n unabhängigen Variablen

Zusammenfassung aller partiellen Ableitungen einer Funktion

$z = f(x_1, \dots, x_n)$ als Vektor:

Gradient von f

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n} \right) =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x_1} \\ \frac{\partial z}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial z}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Partielle Ableitungen 1.Ordnung für Funktionen mit n unabhängigen Variablen

Beispiele

Partielle Ableitungen höherer Ordnung für Funktionen mit n unabhängigen Variablen

Genau wie bei Funktionen mit einer Veränderlichen, kann man die partielle Ableitung noch einmal partiell differenzieren und kommt somit zu partiellen Ableitungen höherer Ordnung.

Partielle Ableitungen höherer Ordnung für Funktionen mit n unabhängigen Variablen

Es gibt n^2 partielle Ableitungen 2. Ordnung und n^m partielle Ableitungen m-ter Ordnung.

Schreibweise:

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(f_x(x, y)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(f_y(x, y)) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$$

direkte Ableitungen

Partielle Ableitungen höherer Ordnung für Funktionen mit n unabhängigen Variablen

Schreibweise:

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(f_x(x, y)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$f_{yx}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(f_y(x, y)) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$$

gemischte Ableitungen

Partielle Ableitungen höherer Ordnung für Funktionen mit n unabhängigen Variablen

Schreibweise:

$$z_{xyz}(x, y, z) = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial z}$$

Partielle Ableitung 3. Ordnung

Die Anzahl der Indizes entspricht der Ordnung der partiellen Ableitung, Reihenfolge „von links nach rechts“

Partielle Ableitungen höherer Ordnung für Funktionen mit n unabhängigen Variablen

Satz von Schwarz:

Ist eine Funktion f mit n unabhängigen Variablen m -mal stetig differenzierbar, so sind die gemischten partiellen Ableitungen m -ter Ordnung unabhängig von der Reihenfolge des Differenzierens gleich

Partielle Ableitungen 1.Ordnung für Funktionen mit n unabhängigen Variablen

Fasst man den Gradienten als Vektor auf, so kann dieser Vektor für variable Werte von $(x_1, \dots, x_n)$ als *Vektorfunktion* aufgefasst werden. Betrachtet man diesen Gradientenvektor „angeheftet“ am Punkt $P(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))$, so zeigt dieser Vektor in die Richtung der maximalen Zuwachsrates von f , der Betrag ist die maximale Zuwachsrates.

Partielle Ableitungen 1.Ordnung für Funktionen mit n unabhängigen Variablen

Der Gradient kann also jedem Punkt zugeordnet werden und liefert, für verschiedene Punkte aufgezeichnet, ein sogenanntes Skalarfeld. Am Beispiel einer Höhenkarte einer Landschaft liefert dieses Skalarfeld einen Überblick über die Richtungen der steilsten Anstiege.

Diese Interpretationen führen schon weit in das Gebiet der Vektoranalysis hinein.

Partielle Ableitungen 1.Ordnung für Funktionen mit n unabhängigen Variablen Ökonomische Bedeutung

Wichtigstes Hilfsmittel bei der sogenannten
Partialanalyse ökonomischer Funktionen:

Betrachtung ökonomischer Zielfunktionen
(Kostenfunktionen, Gewinnfunktionen u.a.),
wenn nur eine einzige Variable verändert wird,
während alle anderen Variablen konstant
gehalten werden.

(später dann: Totalanalyse)

Darstellung der Partielle Ableitungen höherer Ordnung für Funktionen mit n unabhängigen Variablen

Entspricht dem Gradienten für die Ableitung
erster Ordnung

$$\begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdot & \cdot & \cdot & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{x_nx_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

Hesse Matrix

Darstellung der Partielle Ableitungen zweiter Ordnung für Funktionen mit n unabhängigen Variablen

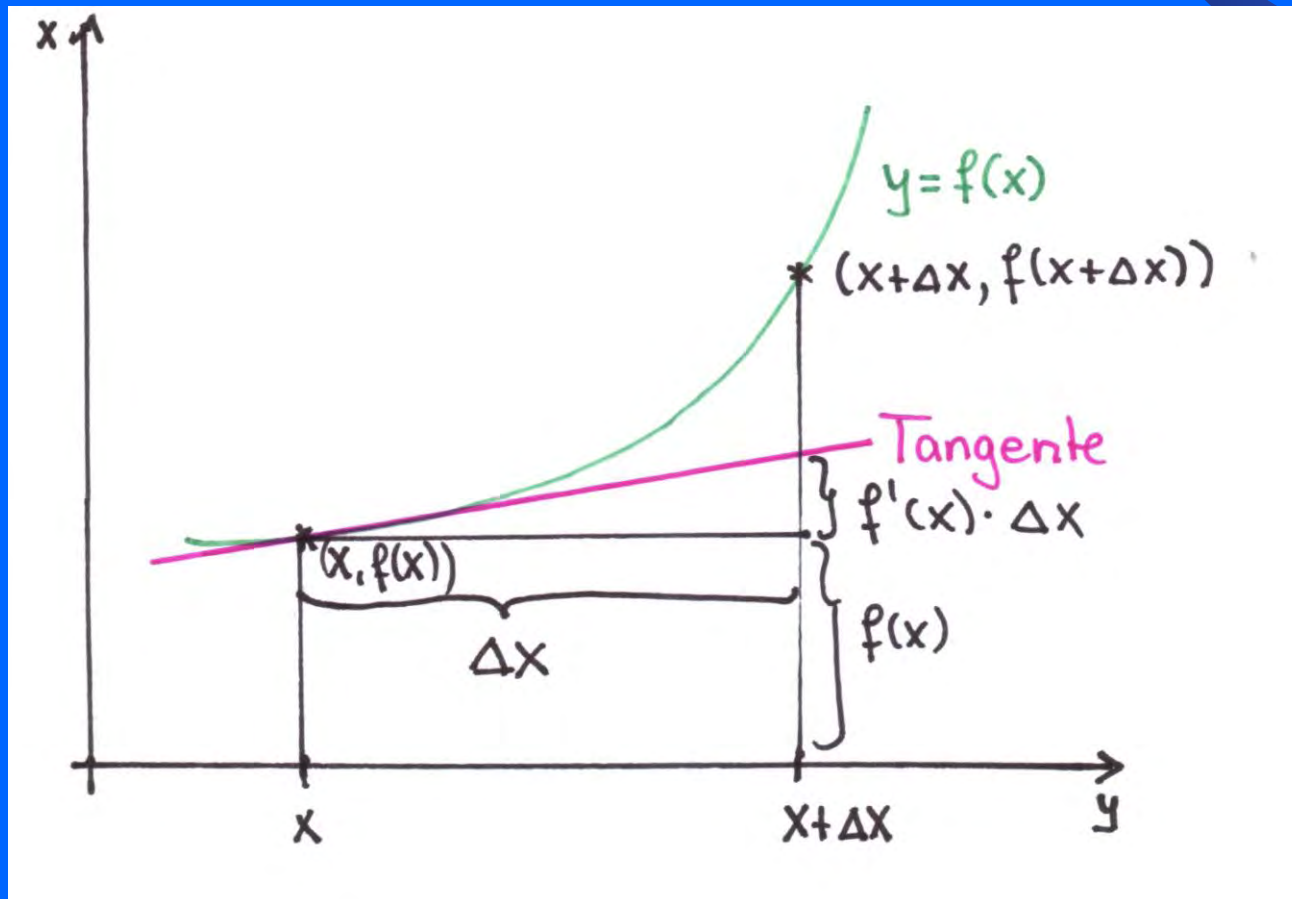
Beispiele

Interpretation der zweiten partiellen Ableitung

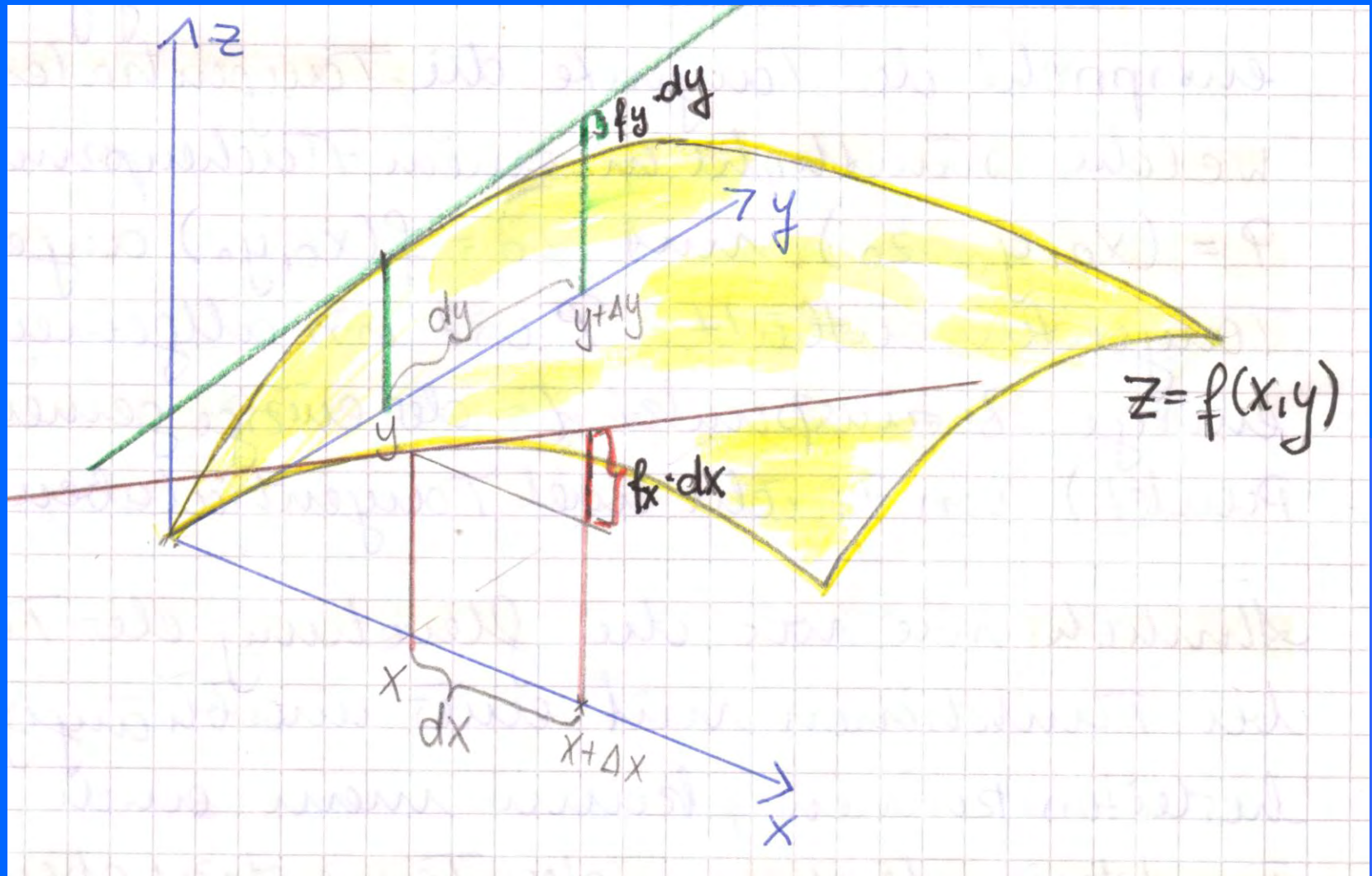
Analog zu Funktionen mit einer unabhängigen Variablen kann man bei Funktionen mit zwei unabhängigen Variablen die Interpretation der Ableitung auf die jeweiligen Schnittkurven übertragen, also die zweite direkte Ableitung f_{xx} als *Maß für die Krümmung der Schnittkurve parallel zur x-Achse*, f_{yy} als *Maß für die Krümmung der Schnittkurve parallel zur y-Achse*.

Partielles und totales Differenzial

Wiederholung: Differenzial



Partielles Differenzial



Totales Differenzial

Geometrische Vorbetrachtungen

Tangentialebene

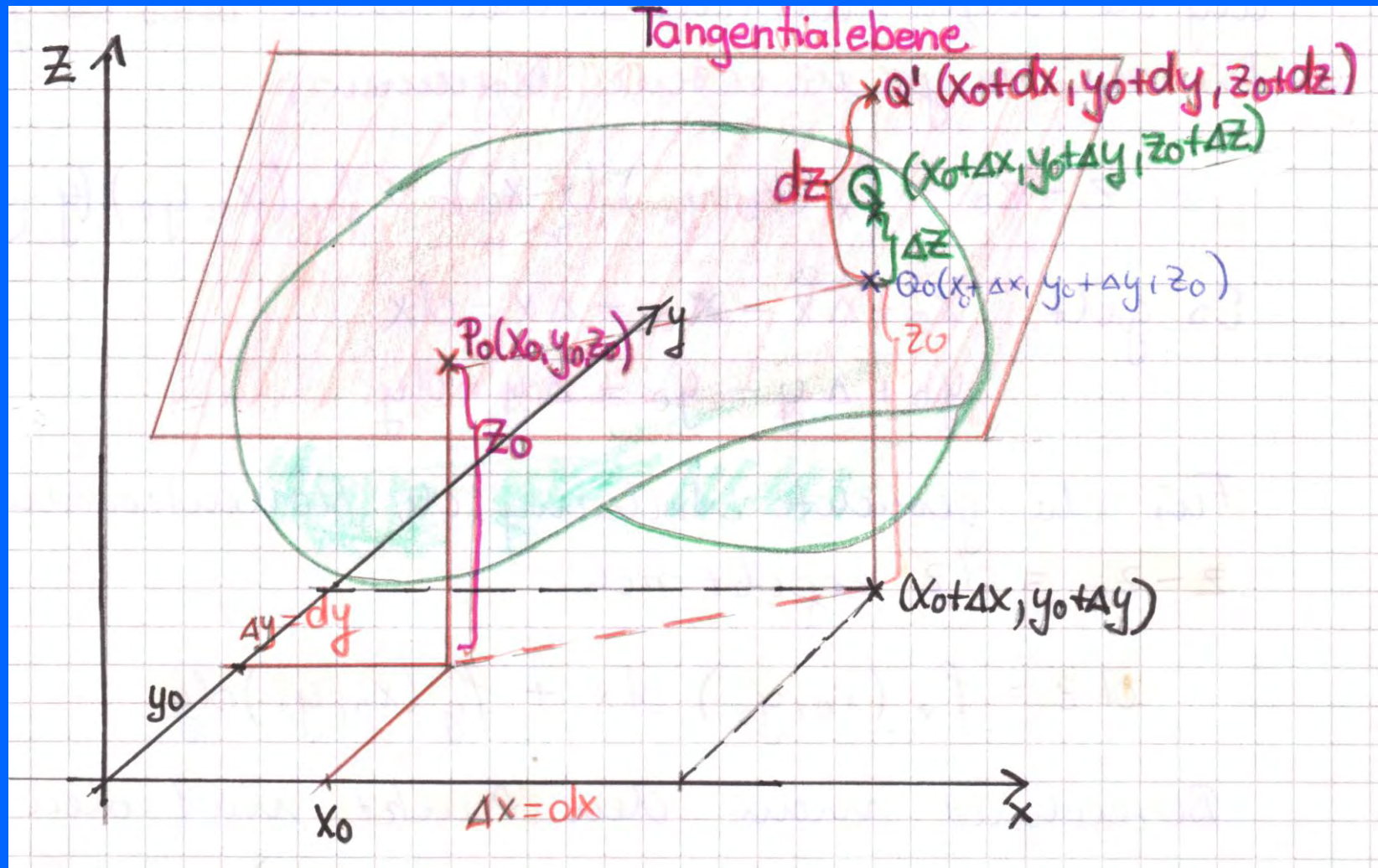
Funktionsgleichung der Tangentialebene

Totales Differenzial

Fragestellung:

Wie ändert sich die Höhenkoordinate z des Punktes P bei einer Verschiebung des Punktes auf der Fläche selbst bzw. auf der zugehörigen Tangentialebene?

Totales Differenzial



Totales Differenzial

Def.: Das totale oder vollständige Differenzial einer Funktion $z=f(x,y)$ ist der lineare Differenzialausdruck

$$dz = f_x dx + f_y dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Totales Differenzial

Def.: Das totale oder vollständige Differenzial einer Funktion $z=f(x_1,\dots x_n)$ ist der lineare Differenzialausdruck

$$dz = f_{x_1} dx_1 + f_{x_2} dx_2 + \dots + f_{x_n} dx_n$$

Totales Differenzial

**Wichtigstes Hilfsmittel bei der sogenannten
*Totalanalyse ökonomischer Funktionen:***

**Betrachtung ökonomischer Zielfunktionen
(Kostenfunktionen, Gewinnfunktionen u.a.),
wenn alle Variablen verändert werden**

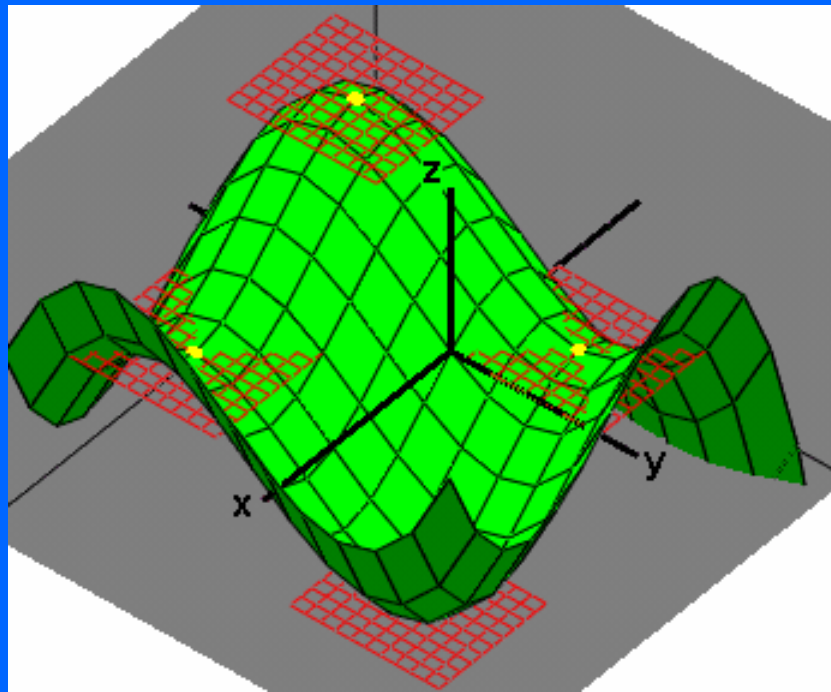
Totales Differenzial

Beispiel

Extremwerte bei Funktionen mit mehreren unabhängigen Veränderlichen

Zunächst: $n=2$

Notwendige Bedingung: Tangentialebene muss parallel zu x.y-Ebene verlaufen, aber: auch in den sog. Sattelpunkten verläuft die Tangentialebene „waagrecht“



Extremwerte bei Funktionen mit mehreren unabhängigen Veränderlichen

Hinreichende Bedingungen:

Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung erfüllen folgende Ungleichungen:

$$\Delta = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) > 0$$

$$f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow \text{Max}$$

$$f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow \text{Min}$$

Extremwerte bei Funktionen mit mehreren unabhängigen Veränderlichen

Darstellung der hinreichende Bedingungen in Determinantenform:

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

Hesse'sche Determinante

Falls $\Delta < 0$, dann liegt ein Sattelpunkt vor,
falls $\Delta = 0$, dann kann keine Entscheidung
getroffen werden

Extremwerte bei Funktionen mit mehreren unabhängigen Veränderlichen allgemein

Notwendig: $\text{grad } f = 0$

Hinreichend:

$$H(x) = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1}(x_0, y_0) & \cdot & \cdot & f_{x_1x_n}(x_0, y_0) \\ f_{x_2x_1}(x_0, y_0) & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{x_nx_1}(x_0, y_0) & \cdot & \cdot & f_{x_nx_n}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

Hesse'sche Matrix

Extremwerte bei Funktionen mit mehreren unabhängigen Veränderlichen allgemein

Sei

$$H_i(x) = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1}(x_0, y_0) & \cdot & \cdot & f_{x_1x_i}(x_0, y_0) \\ f_{x_2x_1}(x_0, y_0) & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{x_ix_1}(x_0, y_0) & \cdot & \cdot & f_{x_ix_i}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

Hauptunterdeterminante

Extremwerte bei Funktionen mit mehreren unabhängigen Veränderlichen allgemein

Lokales Maximum an der Stelle x

$$\Leftrightarrow H_1 < 0, H_2 > 0, H_3 < 0, \dots$$

Lokales Minimum an der Stelle x

$$\Leftrightarrow H_1 > 0, H_2 > 0, H_3 > 0, \dots$$

Extremwerte bei Funktionen mit mehreren unabhängigen Veränderlichen allgemein

Beispiel

Extremwerte bei Funktionen mit mehreren unabhängigen Veränderlichen mit Nebenbedingungen

Gerade ökonomische Zusammenhänge können erst dann optimiert werden, wenn noch zusätzliche Einschränkungen gelten, wie z.B. beschränkte Rohstoffe, Einhaltung technischer Vorschriften,..

Diese Restriktionen sind anders als in der Linearen Optimierung in Form von Gleichungen formuliert.

Extremwerte bei Funktionen mit mehreren unabhängigen Veränderlichen mit Nebenbedingungen

Beispiel für eine geometrische Problemstellung :

Welche Punkte auf der Ebene mit der Gleichung $x+y+z=0$, die auf der Kugeloberfläche um den Ursprung mit Radius 1 liegen, haben den kleinsten bzw. den größten Abstand von der z -Achse?

Extremwerte bei Funktionen mit mehreren unabhängigen Veränderlichen mit Nebenbedingungen

Analytische Formulierung des Problems:

Zielfunktion: $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Nebenbedingungen:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$x + y + z = 0$$

Extremwerte bei Funktionen mit mehreren unabhängigen Veränderlichen mit Nebenbedingungen Lösungsmöglichkeiten

Lösung durch Variablensubstitution

**nur, wenn eine Nebenbedingung vorliegt
und diese nach einer Variablen aufgelöst
werden kann**

Extremwerte bei Funktionen mit mehreren unabhängigen Veränderlichen mit Nebenbedingungen Lösungsmöglichkeiten

Lösung mit Hilfe der Methode von Lagrange

**Prinzip: aus der Zielfunktion und aus den
Nebenbedingungen wird eine neue Funktion
erzeugt, für die ein globaler Extremwert
berechnet wird**

Extremwerte bei Funktionen mit mehreren unabhängigen Veränderlichen mit Nebenbedingungen Lösungsmöglichkeiten

Beispiel

Die Methode von Lagrange bei Funktionen mit n unabhängigen Veränderlichen

$z=f(x_1,\dots,x_n)$ Zielfunktion

$z_j=g_j(x_1,\dots,x_n)=0$ k Nebenbedingungen
 $j=1,\dots,k$

$$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^k \lambda_j g_j(x)$$

Lagrange-Funktion , für die das Maximum oder das Minimum berechnet werden muss

Die Methode von Lagrange bei Funktionen mit n unabhängigen Veränderlichen

Notwendige Bedingung: sämtliche partielle Ableitungen erster Ordnung verschwinden

Hinreichende Bedingung: etwas kompliziert, mit Hilfe von Unterdeterminanten der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung

Wir gehen davon aus, dass der Wert, den man über die notwendige Bedingung erhalten hat, auch einen Extremwert liefert.

Interpretation des Lagrange-Multiplikators

Der *Lagrange-Multiplikator* lässt sich als die *infinitesimale Änderungsrate* der Funktion L bei Variation der Nebenbedingung g interpretieren.

Man spricht auch von der marginalen Änderungsrate der Funktion f relativ zur Nebenbedingung g

Interpretation des Lagrange-Multiplikators

Der Wert des Lagrange-Multiplikators gibt an, um wie viele Einheiten sich die Zielfunktion ändert, wenn sich die Konstante der Nebenbedingung um eine Einheit ändert. Im Falle einer Kostenfunktion sind das die Grenzkosten.

Man beachte, dass im Optimum die Lagrange-Funktion und die Zielfunktion identisch sind, da die Nebenbedingung Null wird.

Anwendung der mehrdimensionalen Analysis Ausgleichsrechnung

Lineare Anpassung (siehe Statistik)

Anwendung der mehrdimensionalen Analysis

Methode der kleinsten Quadrate nach C.F. Gauss

Anwendung der mehrdimensionalen Analysis

Anpassung mit Hilfe von
Ausgleichskurven