

Bew S10-4

$$1) \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \text{ geordnet: } \overset{1.}{n} \cdot \overset{2.}{n} \cdot \dots \cdot \overset{k.}{n} = n^k \quad (\text{Produktregel})$$

$$2) \mathbb{Z} \circ \mathbb{Z}, \text{ geordnet: } \overset{1.}{n} \cdot \overset{2.}{(n-1)} \cdot \dots \cdot \overset{k.}{(n-k+1)} = \quad (\text{Produktregel})$$

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \dots \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

3) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, ungeordnet: Geheime Wahl mit $n=3$ Kandidaten A, B, C und $k=10$ Wählern

Typischer Wahlausgang: A A B C A C A B A C

Wahlleiter ordnet die Stimmen $\underbrace{A A A A A}_{\text{Trennblätter}} | B B | C C C$

$$12 = k + n - 1$$

Die Lage der Trennblätter charakterisiert

eindeutig den Wahlausgang (!)

Trennblätter positionieren: Ziehe $n-1$ mal
aus der Positionsmenge $\boxed{1} \dots \boxed{12}$ z.B.

also $\binom{k+n-1}{n-1}$ Möglichkeiten
Regel Binomial koeff.

Alternativ $\binom{n+k-1}{n-1} \stackrel{\downarrow}{=} \binom{n+k-1}{k}$

4) z.B., ungeordnet: wie bei 2), nur die
 $k!$ Permutationen der Ziehung muß man
heraus dividieren

Deshalb: $\underbrace{\frac{n!}{(n-k)!}}_{\text{aus 2)}} \cdot \frac{1}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! k!} = \underline{\underline{\binom{n}{k}}}$

Beispiel 1

Wir nummerieren die Kugeln gedanklich durch $n = 30$

a) Wieviele Ziehungen insgesamt

z.z., Kombination :

$$\binom{30}{4}$$

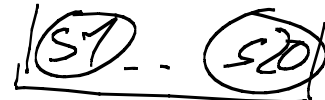
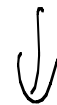


b) Wieviele günstige



$$3x: \binom{10}{3}$$

Produktregel



$$\cdot \binom{20}{1}$$

1x

$$\text{Laplace: } \frac{\# \text{ günstige}}{\# \text{ überhaupt}} =$$

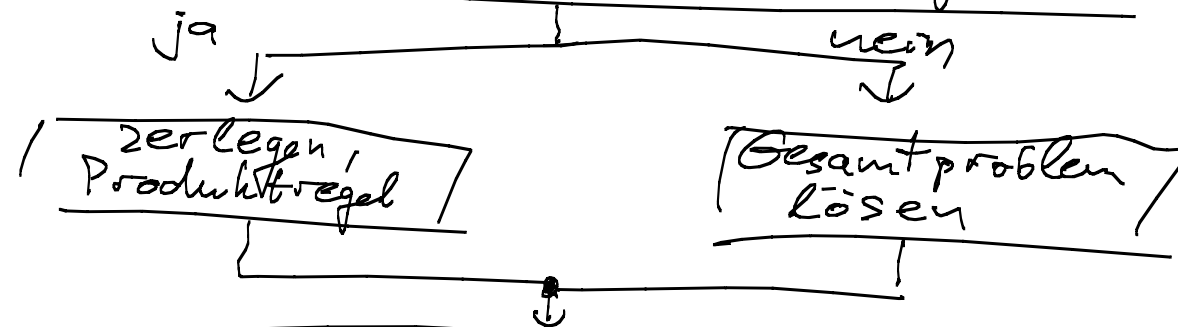
$$\frac{\binom{10}{3} \cdot \binom{20}{1}}{\binom{30}{4}}$$

$$= \frac{\left(\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right) \cdot 20}{\left(\frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \right)}$$

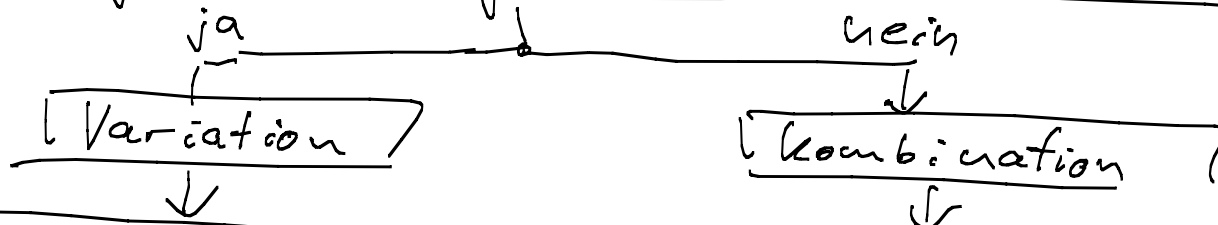
$$= \underline{8.75\%} = P(3W, 1S)$$

Systematische Kombinatorik

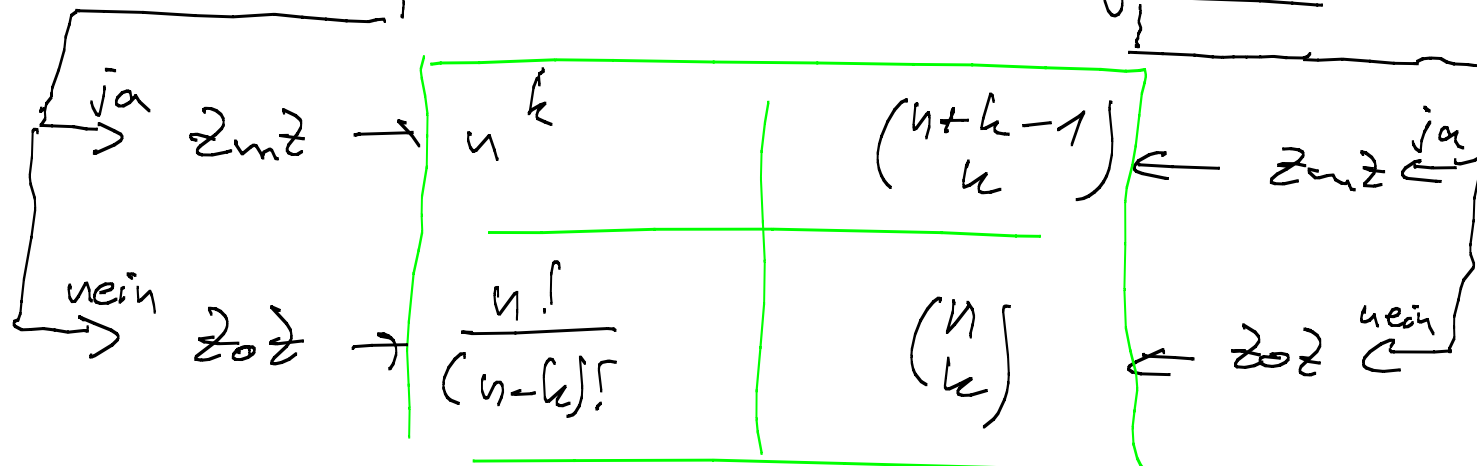
Problem in Teilschritte zerlegbar?



Reihenfolge der ausgewählten El. wichtig?



Treten Ele. mehrfach auf?



Ü1 $\mathbb{Z}_m \mathbb{Z}$, geordnet $\rightarrow$ Variation $\rightarrow n^k$

$$\frac{5^4}{26^4} = 0.13\% = P(\text{4er Wort nur aus } \{A, B, C, D, E\})$$

Ü2 a) 8 Pferde, $\begin{matrix} 1. & 2. & 3. \\ 8 & \cdot & 7 & \cdot & 6 \end{matrix} = 336$ Möglichkeiten

b) günstige Fälle: Erster korrekt 1 Mögl.

$$\begin{matrix} 1. & 2. & 3. \\ 1 & \cdot & 7 & \cdot & 6 \end{matrix} = 42 \text{ Möglichkeiten}$$

$$P(\text{Wettschein mit Erster korrekt}) = \frac{42}{336} = \frac{1}{8}$$

$$= \underline{\underline{12.5\%}}$$

Ü3 Lotto: $\mathbb{Z}_0 \mathbb{Z}$, Kombination $\rightarrow \binom{n}{k}$

a) Ziehungen überhaupt $n = 49, k = 6$

$$\binom{49}{6} = 13\,983\,816 \text{ Möglichkeiten}$$

b) $\underbrace{(\textcircled{R1} \dots \textcircled{R6})}_{4x} \quad \underbrace{(\textcircled{F1} \dots \textcircled{F43})}_{2x}$

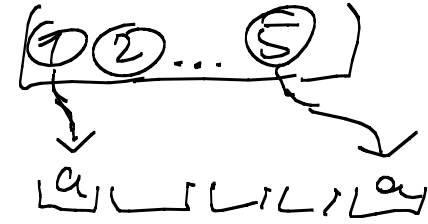
$$\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2} = \text{Möglichkeiten 4 Richtige}$$

$$= \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot \frac{43 \cdot 42}{1 \cdot 2} = 15 \cdot 903 \approx 15000$$

$$\text{Laplace: } P(4 \text{ Richtige}) = \frac{15 \cdot 903}{\binom{49}{6}} \approx 0.000968$$

$$\approx \underline{\underline{\frac{1}{1000}}}$$

Ü4 1. Schritt: In wieviel Positionen können die 2 a's auftauchen? Z.B., Reihenfolge egal aus der Positionsmenge $\boxed{\textcircled{1} \textcircled{2} \dots \textcircled{5}}$: $\binom{5}{2} = 10$



Möglichk.

2. Schritt: Restliche 3 Positionen irgendwie mit b oder c besetzen: Z.B., geordnet $2^3 = 8$ Möglichkeiten, z.B. abccba

Insgesamt: $10 \cdot 8 = \underline{\underline{80}}$ Wörter mit 2 a's

Ü5 Zuz, ungeordnet, $n=3$, $k=60$

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{62}{60} = \binom{62}{2} = \frac{62 \cdot 61}{1 \cdot 2} =$$

≤ 1891 Wahl ausgänge