Mathe V 5.5. 2014

Komplexe Zahlen: Darstellungsformen

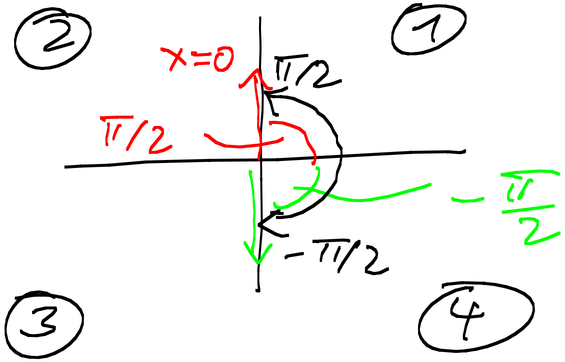
1) kartesisch $z = \underline{x} + i\underline{y}$

2) trigonometr. $= \underline{r\cos\varphi} + \underline{ir\sin\varphi}$

$= \underset{\text{Betrag}}{r} \underbrace{(\cos\varphi + i\sin\varphi)}_{\text{Phase, Winkel}}$

3) Exponentialform: $z = r\,\underline{e^{i\varphi}}$

Umrechnung kartesisch → polar



Wenn $x=0$ dann

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ falls $y>0$

$\varphi = -\frac{\pi}{2}$ falls $y<0$

$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$

$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

$\varphi = \text{atan2}(y, x)$ macht alle diese Fallunterscheidungen für Sie!

ü $z = 1.5 + i(-2.598)$ in Polarform

$$z = \frac{3}{2} - i\,\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

Polarform: r, φ $\qquad r = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$

$$r = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \sqrt{3}^2} = \frac{3}{2}\sqrt{1+3} = \underline{\underline{3}}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{Im(z)}{Re(z)}\right) + 0 \qquad Re(z) > 0 \Rightarrow 4. Q$$

$$= \arctan\left(\frac{-\frac{3}{2}\sqrt{3}}{\frac{3}{2}}\right) = \arctan\sqrt{3} = \underline{\underline{-\frac{\pi}{3}}}$$

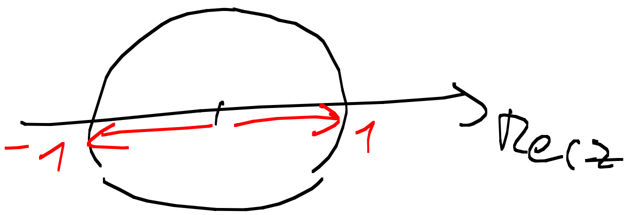
$$\hat{=} -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \underline{\underline{\frac{5\pi}{3}}}$$

$$z = r e^{i\varphi} = \underline{\underline{3 e^{i 5\pi/3}}}$$

Potenzen komplexer Zahlen

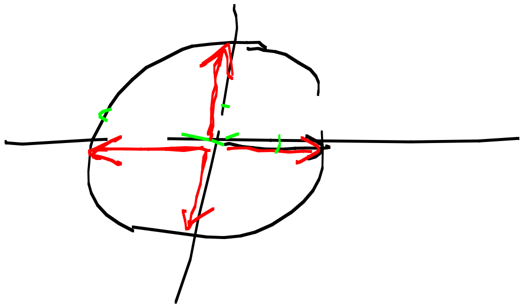
1) $z^2 = 1$ im Reellen: $z = \pm 1$

im Komplexen $z = \pm 1$

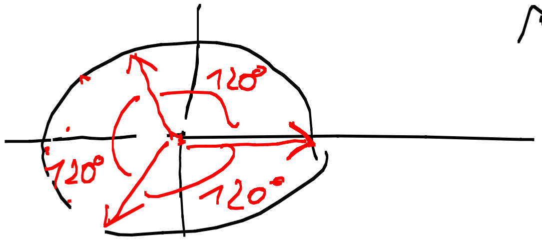


2) $z^4 = 1 \Leftrightarrow z = 1^{\frac{1}{4}}$ im Reellen: $z = \pm 1$

im Komplexen: $z = +1, i, -1, -i$



3) $z^3 = 1 \iff z = 1^{\frac{1}{3}}$ im Reellen $z = +1$



im Komplexen 3 Lsg

$z_k = e^{i(0 + \frac{2k\pi}{3})}$ $\quad k = 0, 1, 2$

z ist 3. Wurzel der Zahl 1

$z_0 = e^{i0} = 1$

$z_1 = e^{i\,2\pi/3}$

$z_2 = e^{i\,4\pi/3}$

Die n.te Wurzel einer komplexen Zahl $z = re^{i\varphi}$ bezeichnet ein Set von n Lösungen

Ein Wurzelterm in $\mathbb{C}$ ist also

mehrdeutig (Relation, keine Funktion)

$$\underline{\underline{z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}}} \quad , \; k = 0, \dots, n-1$$

(n Lösungen)

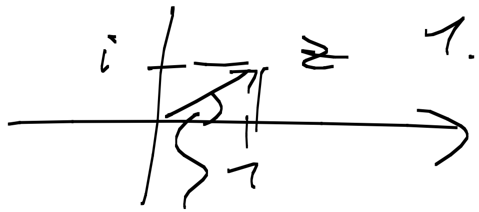
Ü $(1+i)^{3/4} = ?$

$$z = 1 + i = r e^{i\varphi}$$

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

1) Exponentialform
2) Potenzieren
3) Wurzel, $2k\pi$



1. Quadr.

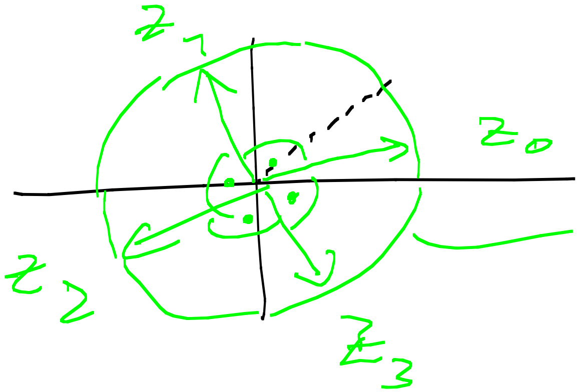
$\pi/4 \mathrel{\hat{=}} 45°$

2) $$(1+i)^{3/4} = \left(\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}\right)^{3/4}$$

$$= \left(\sqrt{2}^{\,3} e^{i\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$= \sqrt[4]{2^3}\left(e^{i\left(\frac{3\pi}{16} + \frac{2k\pi}{4}\right)}\right)$$

$$= \sqrt[4]{8}\, e^{i\left(\frac{3\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}\right)} \quad , \quad k = 0, 1, 2, 3$$



Radius $\sqrt[4]{8}$