

Mathe V 12.05.2014

Lösen von DGLs

1) Direkte Integration

$$s''(t) = g \Rightarrow \dots \Rightarrow s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + Ct + D$$

2) Trennung der Veränderlichen

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = f(x) \cdot g(y) \quad (g(y) \neq 0)$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx \Rightarrow \text{zu lösen}$$

3) Ansatz kennen und in DGL einsetzen

Zu S 12-3

1) $x(t) = e^{\lambda t}$

$$x^{(n)}(t) = \lambda^n e^{\lambda t}$$

Einsetzen in

$$x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_0 x^{(0)} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^n e^{\lambda t} + a_{n-1} \lambda^{n-1} e^{\lambda t} + \dots + a_0 e^{\lambda t} = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0) \underbrace{e^{\lambda t}}_{\text{wird nie 0}} = 0$$

$P(\lambda)$: Nullstellen λ_i sind Lsg

Es gibt also n Lsg.-fkt $x_i(t) = e^{\lambda_i t}$

2) folgt direkt durch Einsetzen von $x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$
in die DGL (*)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Innere Fkt} \\ g(t) = \lambda t \\ g'(t) = \lambda \end{array} \right.$$

(*)

$$3) \quad x(t) = \underbrace{u(t)}_{\text{Re}(x(t))} + i \underbrace{v(t)}_{\text{Im}(x(t))}$$

Einsetzen von $x(t)$ in DGL:

$$u^{(n)} + i v^{(n)} + \dots + a_0(u(t) + i v(t)) = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{sortiere} \\ \text{nach Re, Im} \end{array} \right.$$

$$\left[u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + a_0 u \right] + i \left[v^{(n)} + \dots + a_0 v \right] = 0$$

$$\underbrace{\left[u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + a_0 u \right]}_{\text{rein reell}} = -i \underbrace{\left[v^{(n)} + \dots + a_0 v \right]}_{\text{rein imaginär}}$$

Weil sowohl Realteil als auch Imaginärteil Null sein müssen, folgt: Beide $[...] = 0$

$\Rightarrow u(t)$ löst DGL und $v(t)$ löst DGL

Beispiel

$$\dot{x}(t) = 0.05 x(t)$$

Wie lautet $x(t)$ wenn $x(0) = 4$ gelten soll

Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow \lambda e^{\lambda t} = 0.05 e^{\lambda t} \quad | : e^{\lambda t}$$

$$\lambda = 0.05$$

Allg Lsg nach S 12-3, 2)

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t}$$

$$x(0) = c_1 = 4$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = 4 e^{0.05 t}}$$

Ü2) Welches $x(t)$ löst $\underline{x''(t)} + 4\underline{x'(t)} + 40\underline{x(t)} = 0$
komplexe und reelle

Lösung: $x(t) = \underline{e^{\lambda t}}$, $x'(t) = \underline{\lambda e^{\lambda t}}$, $x''(t) = \underline{\lambda^2 e^{\lambda t}}$

Einsetzen: $\lambda^2 e^{\lambda t} + 4 \lambda e^{\lambda t} + 40 e^{\lambda t} = 0 \quad | : e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 2^2 - 2^2 + 40 = 0 \quad | \text{Quadr. Erg.}$$

$$\Rightarrow (\lambda + 2)^2 + 400 = 0 \quad | \checkmark$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{-400}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -2 \pm 20i$$

$$x_1(t) = e^{-2t} e^{20it}, \quad x_2(t) = e^{-2t} e^{-20it}$$

S 12-3, Nr 3) Nehme Realteil und Imaginärteil von $x_1(t)$

$$x_r(t) = \operatorname{Re}(x_1(t)) = e^{-2t} \cos(20t)$$

$$x_i(t) = \operatorname{Im}(x_1(t)) = e^{-2t} \sin(20t)$$

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$\text{Allg Lsg } \boxed{x(t) = a e^{-2t} \cos(20t) + b e^{-2t} \sin(20t)}$$

Erzwungene Schwingung

$$x''(t) + 2\delta x'(t) + \omega_0^2 x(t) = K_0 e^{i\omega t}$$

Brücke, Federpendel(
Schwingfähiges System

Wind, erzwungene
Schwingung

$$\text{Ansatz } \left. \begin{aligned} x(t) &= A e^{i(\omega t - \varphi)} \\ x'(t) &= i A \omega e^{i(\omega t - \varphi)} \\ x''(t) &= -\omega^2 A e^{i(\omega t - \varphi)} \end{aligned} \right\} \text{ einsetzen in DGL}$$

$$\underline{-\omega^2 A e^{i(\omega t - \varphi)}} + 2\delta i \omega A e^{i(\omega t - \varphi)} + \underline{\omega_0^2 A e^{i(\omega t - \varphi)}} = k_0 e^{i\omega t}$$

$$\omega_0^2 - \omega^2 + 2\delta i \omega = \frac{k_0 \cancel{e^{i\omega t}} \cancel{e^{-i(\omega t - \varphi)}}}{\cancel{A}} \cdot \frac{e^{-i(\omega t - \varphi)}}{A} = \frac{k_0 e^{i\varphi}}{A}$$

Rechts und links muss die gleiche komplexe Zahl stehen, also sind die Beträge gleich

$$\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2} = \frac{k_0}{A}$$

$$A = \frac{k_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}$$

|

Bsp Wurzelgleichung

$$\sqrt{x-6} + 3 = 0 \quad | -3 \quad | ()^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-6} = -3 \quad | ()^2$$

$$\Rightarrow (x-6) = (-3)^2$$

...

~~$$\sqrt{x-6} + 3 = 0$$~~

falsch!