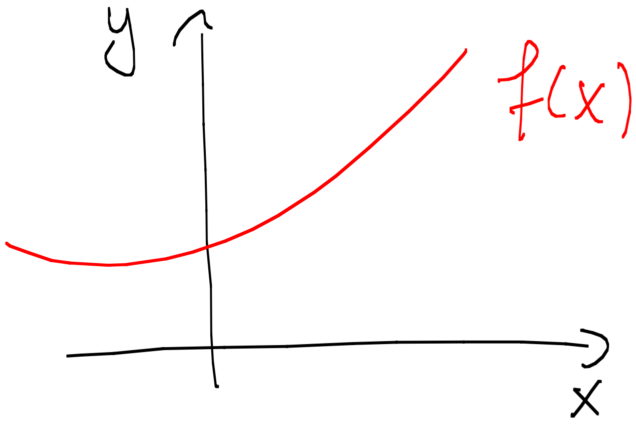
Vorlesung Mathe II, 2. Hälfte

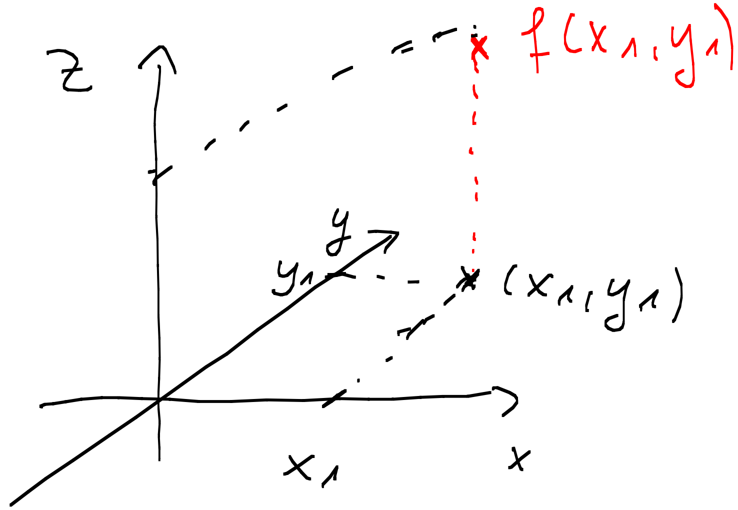
1. Differenzialrechnung für Fkt. mit mehreren unabh. Variablen

2. Graphentheorie

Mehrdimensionale Analysis

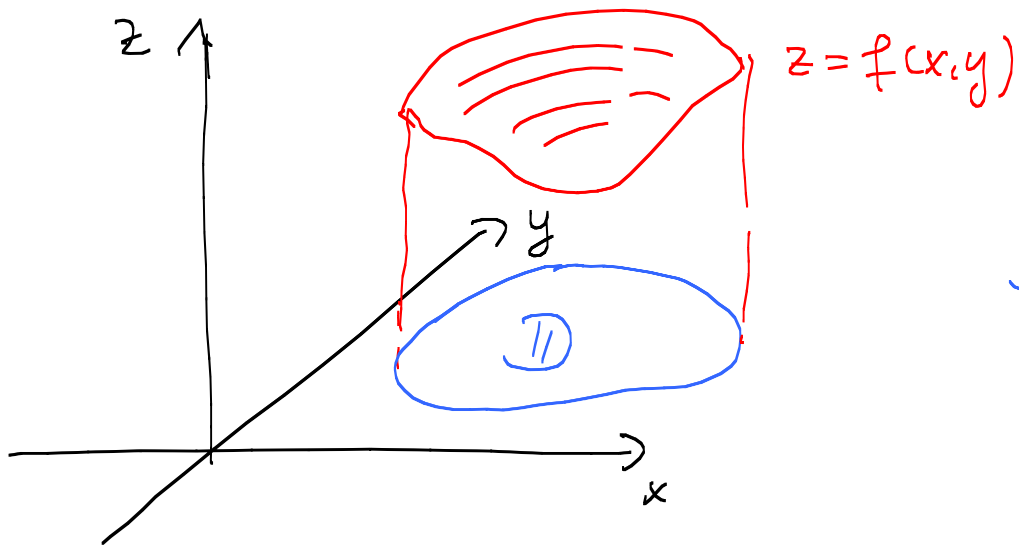
eindimensional





$$f(x,y) = z$$

3D - Funktion



$\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2$

allgemein: $f : D \to \mathbb{R} : D \subseteq \mathbb{R}^n, \; x = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x) \in \mathbb{R}$

heißt Funktion mit n unabhängigen Variablen

$n = 2 \Rightarrow$ 3D-Funktion

Darstellung:

(1) $z = f(x,y)$ explizit

$F(x,y,z) = 0$ implizit

(2) Funktionstabelle

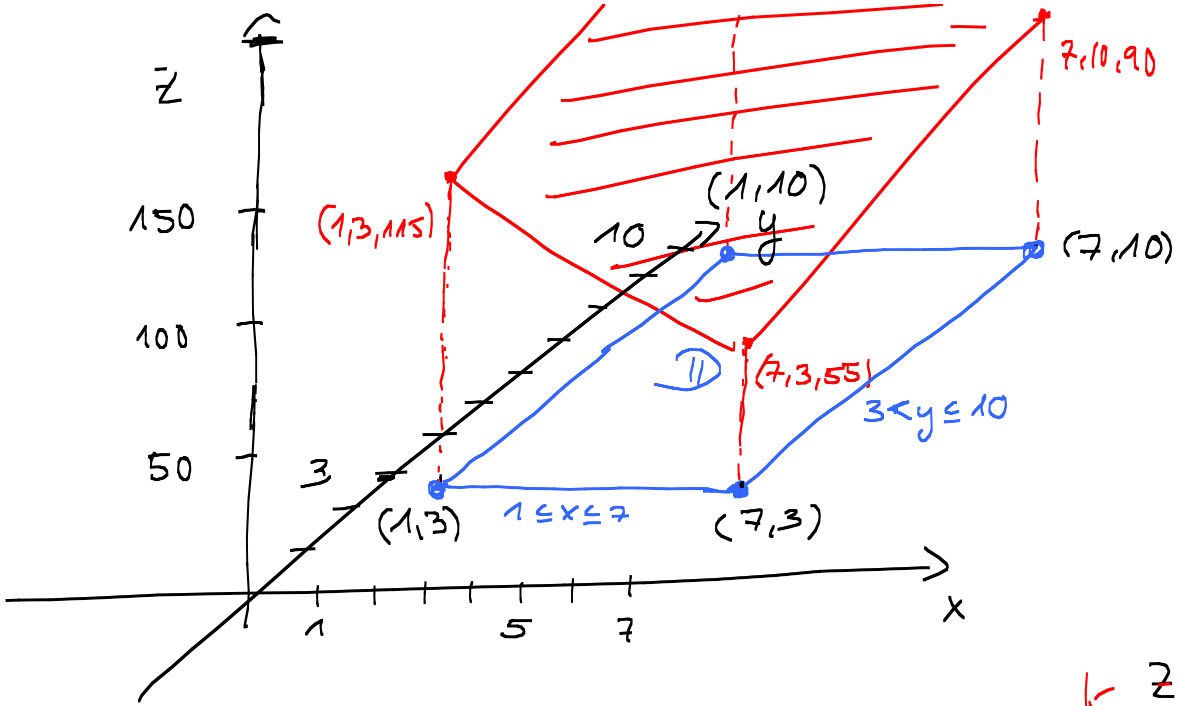
(3) graphische Darstellung

Bp: $f(x,y) = 110 - 10x + 5y$

$$\boxed{\begin{array}{l} 1 \le x \le 7 \\ 3 \le y \le 10 \end{array}}$$

3D - Ebene

Rechteck



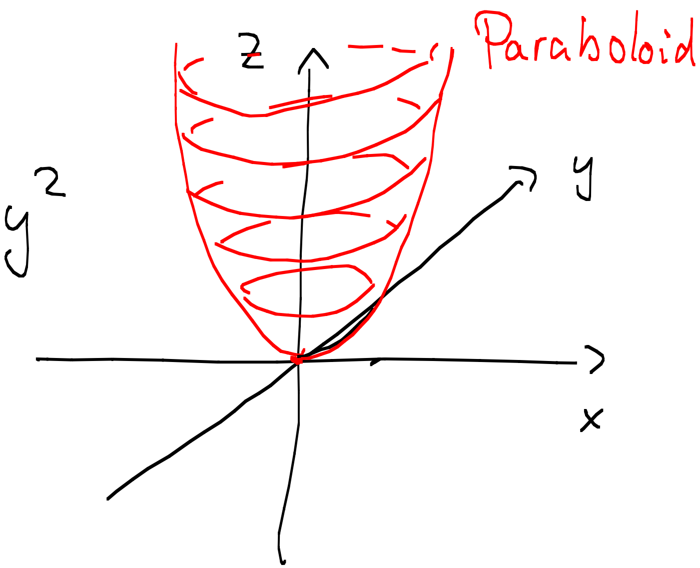
$f(1,3) = 115$

$f(7,3) = 55$

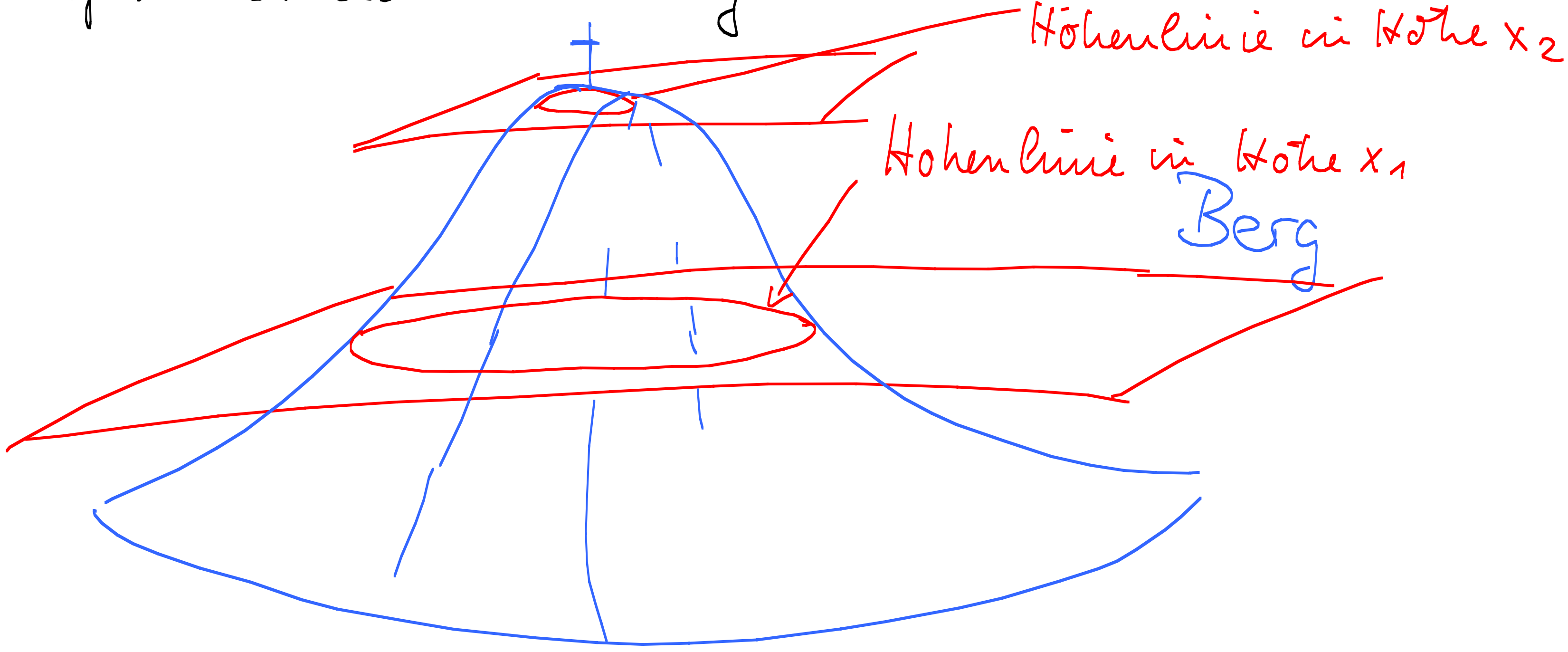
$f(7,10) = 90$

$f(1,10) = 150$

anderes Beispiel: $f(x,y) = z = x^2 + y^2$



Hilfsmittel zur Darstellung von 3D-Fkt.



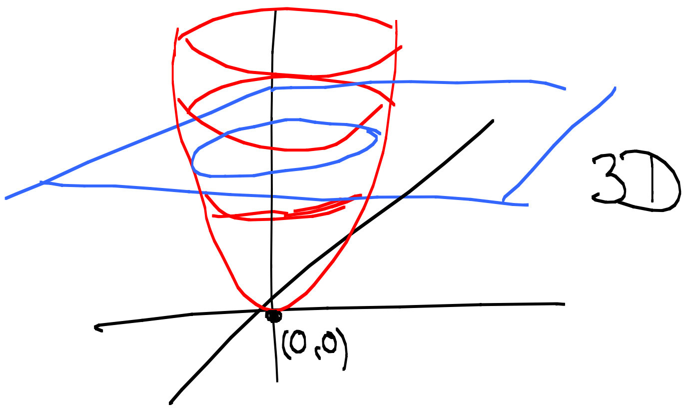
$f(x,y) = z = x^2 + y^2$

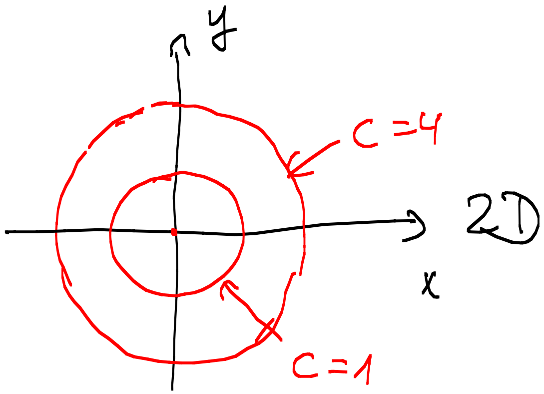
Paraboloid

Höhenlinien sind alle Kurven mit der Gleichung $z = x^2 + y^2 = \text{const.}$

$$x^2+y^2 = c \quad (r^2)$$

Kreis um 0 mit Radius $\sqrt{c}$





$c=0$: $x^2+y^2=0$ $\Rightarrow$ $P(0,0)$

$c=1$: $x^2+y^2=1$ Kreis um 0 mit Radius $\sqrt{1}=1$

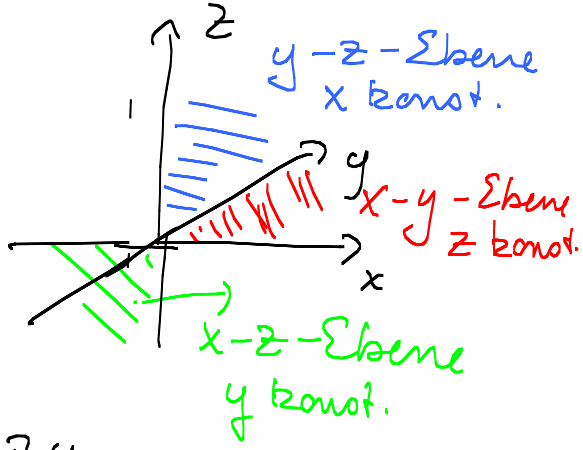
$c=4$: $x^2+y^2=4$ Kreis um 0 mit Radius 2

Höhenliniendarstellung:

z konstant

parallel zur x-y-Ebene

Schnittkurven parallel zur y-z-Ebene

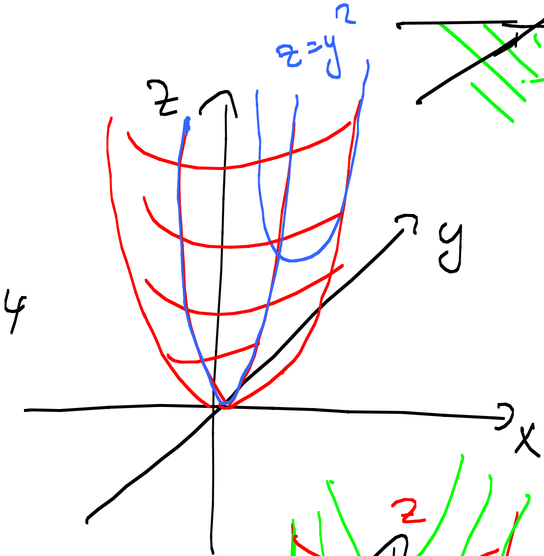


für $z = x^2 + y^2$

$z = c^2 + y^2$

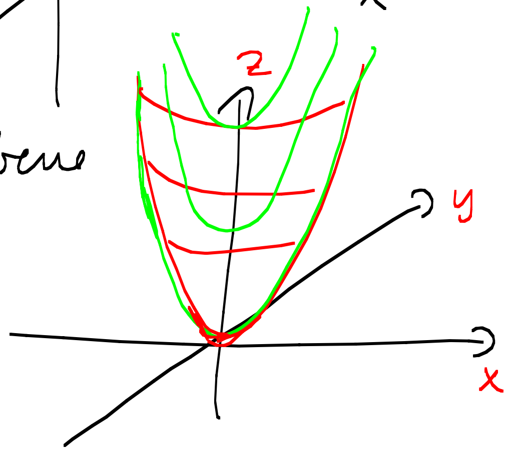
$c = 0: \quad z = y^2$

$c = 2: \quad z = y^2 + 4$

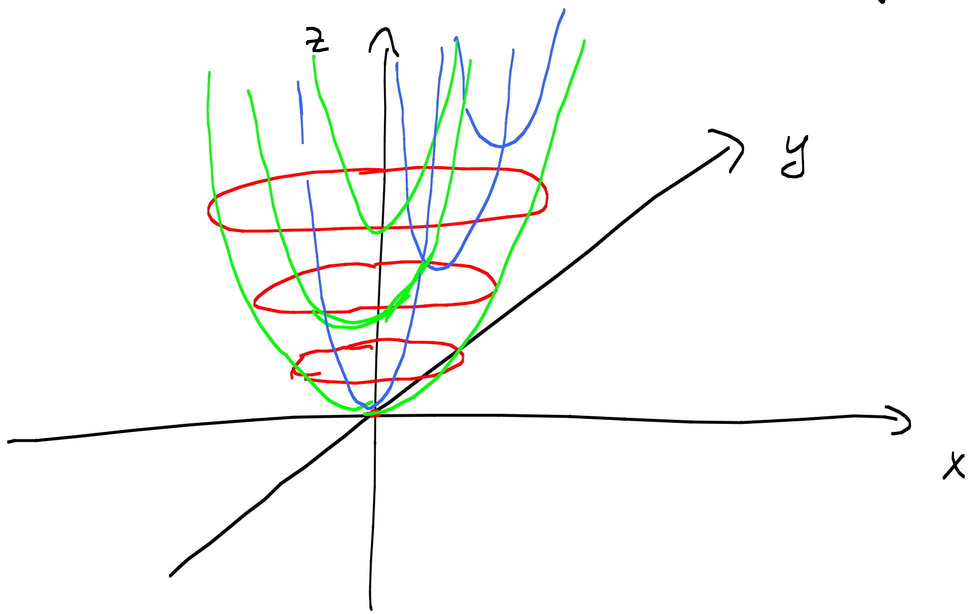


Schnittkurven parallel zur x-z-Ebene

$z = x^2 + c^2$

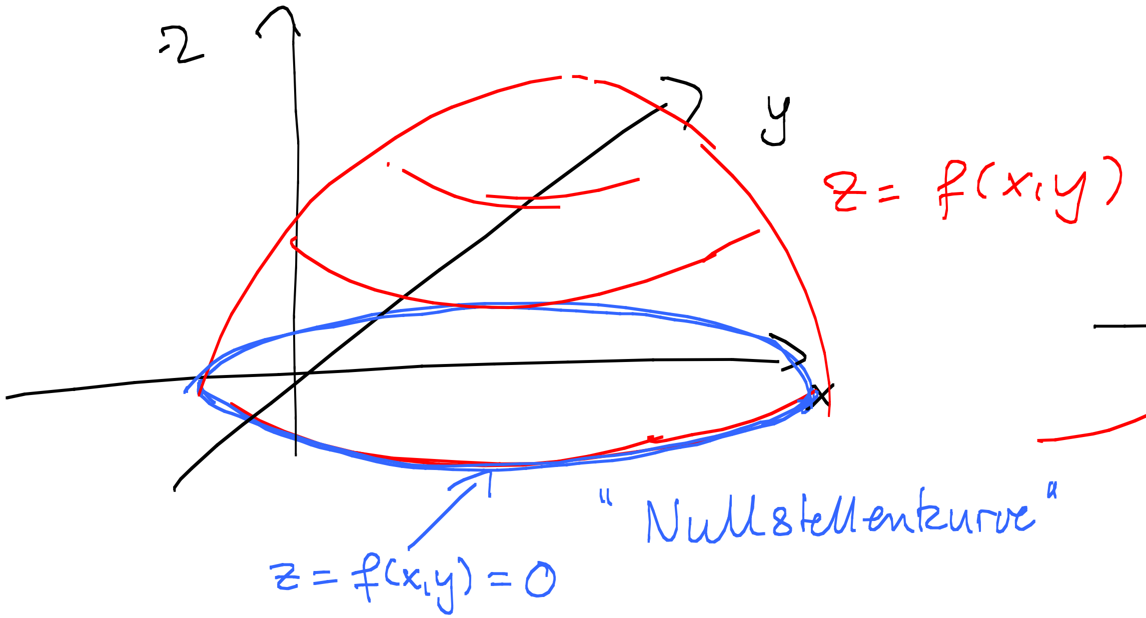


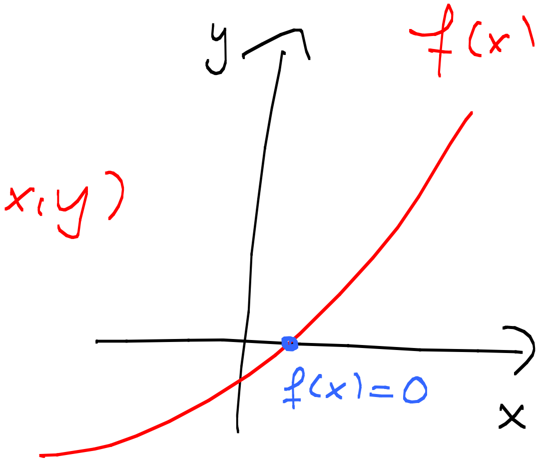
Schnittkurven und Höhenlinien in einem Diagramm



Funktionseigenschaften mehrdimensionaler Funktionen
(hier 3D-Fkt.)

1) Nullstellen





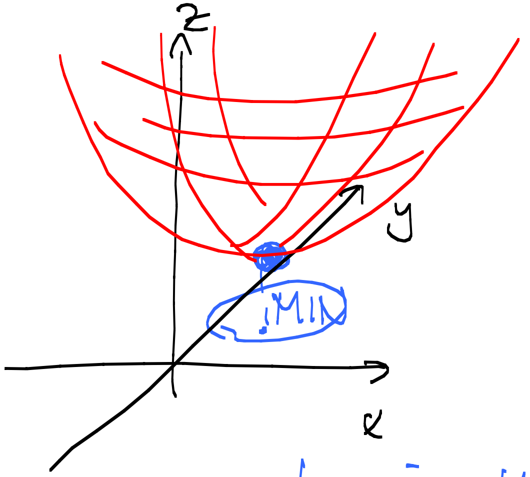
Bp: $z = f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ Halbkugel um (0,0) mit $r = 1$

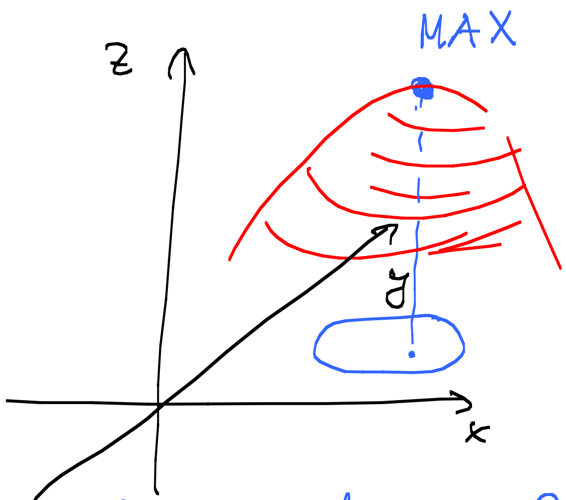
$$f(x,y)=0 \iff \sqrt{1-x^2-y^2}=0 \quad |\,(\ )^2$$

$$\iff 1-x^2-y^2=0 \quad |\,+x^2+y^2$$

$$\iff x^2+y^2=1$$ Kreis um $(0,0)$ mit $r=1$

Extremwerte einer 3D-Fkt.





auf einer Umgebung der kleinste bzw. größte Fkt.wert

Def: Eine Fkt. $z = f(x,y)$ besitzt im Punkt (ξ, η) ein Maximum

$[(\xi,\eta) \in D_f]$ bzw. ein Minimum

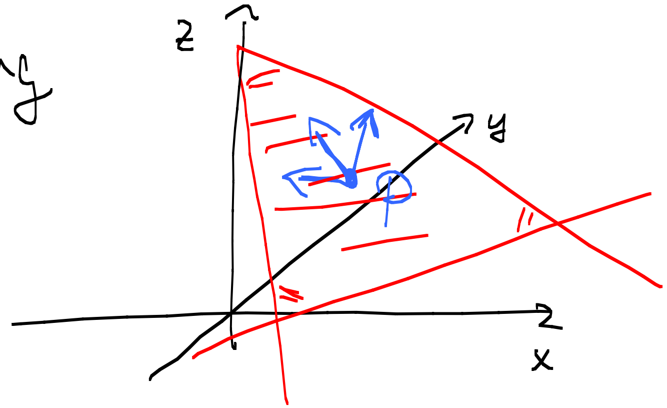
$\Leftrightarrow$ für alle Punkte einer ε-Umgebung $U_\varepsilon(\xi,\eta)$ gilt

Max : $f(x,y) \le f(\xi,\eta)$ für alle $(x,y) \in U_\varepsilon(\xi,\eta)$

Min : $f(x,y) \ge f(\xi,\eta)$ für alle $(x,y) \in U_\varepsilon(\xi,\eta)$

jeweils lokales Max. bzw. Min

Steigung

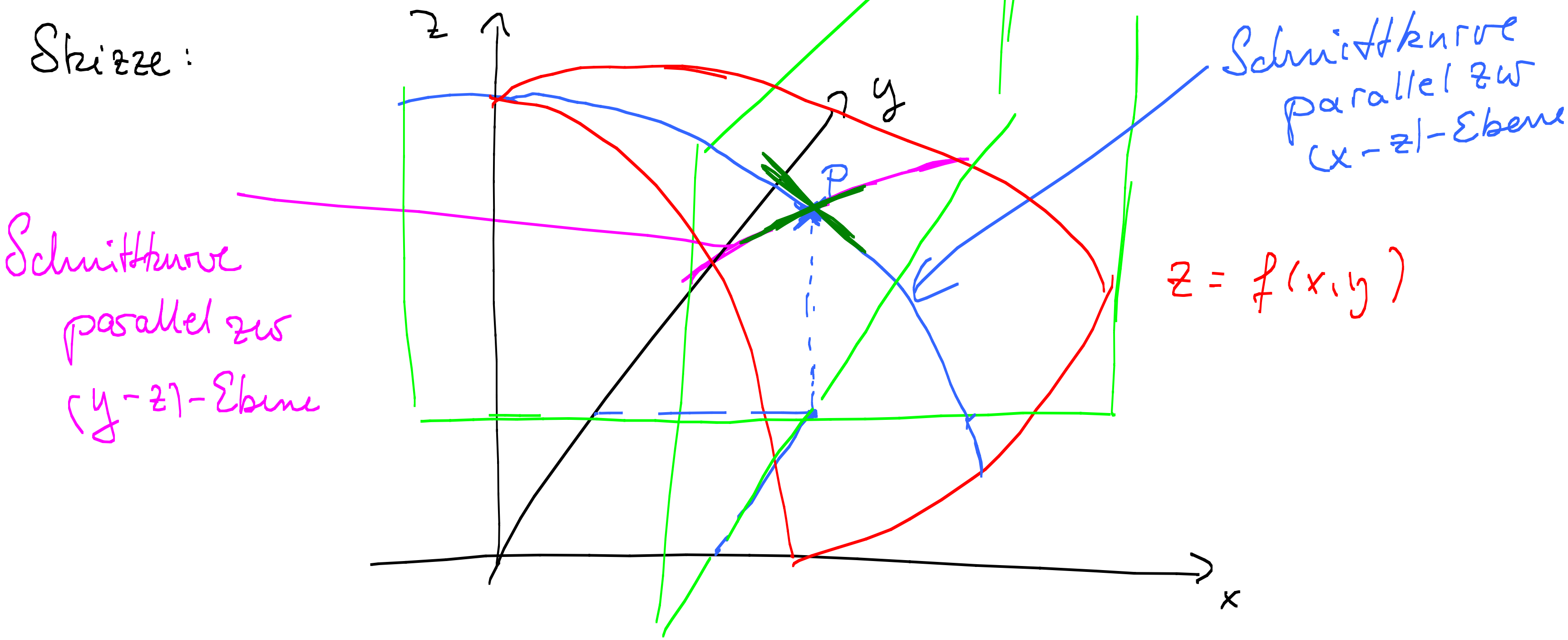


Bei mehrdimensionalen Funktionen benötigt man auch die Angabe einer Richtung, wenn man über Steigung spricht!

Allgemeine Definition:

Die Steigung einer Fläche ist nach Festlegen einer Richtung die Steigung der Schnittkurve in dieser Richtung

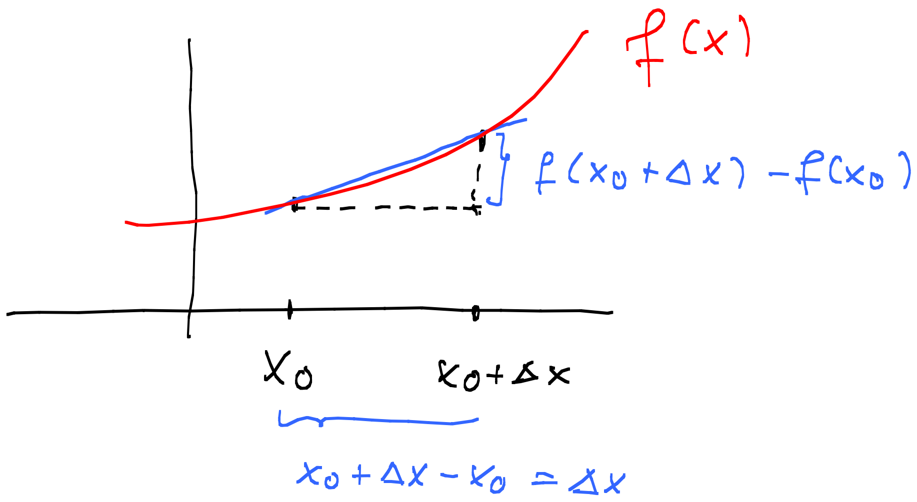
Skizze:



Diese Betrachtungen führen auf den Begriff des partiellen Ableitungen 1. Ordnung

Zur Erinnerung: (Fkt. m. 1 Variablen)

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



Def: Partielle Ableitung 1. Ordnung für $z = f(x,y)$

a) Die erste partielle Ableitung der Funktion $z = f(x,y)$ nach der Variablen x

$$f_x(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

Steigung der Schnittkurve in x-Achsenrichtung

y hier konstant

b) Die erste partielle Abl. nach y:

$$f_y(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Steigung der Schnittkurve in y-Achsenrichtung
x hier konstant