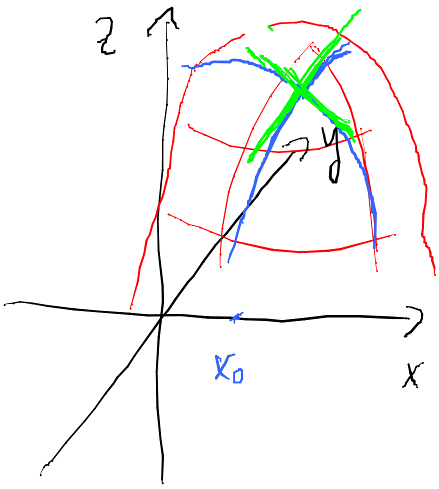
Vorlesung 21.5.2014



2 Steigungen

Gradient von f: Zusammenfassung aller partiellen Abl. 1. Ordnung in einen Spalten- bzw. Zeilenvektor

Bp: $z = f(x,y) = e^{x\cdot y}$

(1) $\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x,y) = y\cdot e^{xy}$

$\frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x,y) = x\cdot e^{xy}$

NR:

$f(x,y) = e^{x\cdot \boxed{y}}$

$f_x(x,y) \; \boxed{y}\cdot e^{xy}$

innere Abl.

$f_y(x,y) = \boxed{x}\cdot e^{\boxed{x}y}$

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} y \cdot e^{xy} \\ x \cdot e^{xy} \end{pmatrix}$$

Für $P = (1, 1, e)$ hat der Gradient folgenden Wert:

$f_x(1,1,e) = e$

$f_y(1,1,e) = e$

$$\operatorname{grad} f_P = \begin{pmatrix} e \\ e \end{pmatrix}$$

② $z = f(x,y) = x^n \cdot \boxed{y^m}$

$f_x(x,y) = n \cdot x^{n-1} \boxed{y^m}$

$f_y(x,y) = \boxed{x^n} \cdot m \cdot y^{m-1}$

③ $z = f(x,y) = x \cdot \ln y$

$f_x(x,y) = \ln y$

$f_y(x,y) = x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{y}$

④ $z = f(x,y) = \sin(x) \cdot \cos(y)$

$f_x(x,y) = \cos(x) \cdot \cos(y)$

$f_y(x,y) = \sin(x) \cdot (-\sin(y)) = -\sin(y) \cdot \sin(x)$

⑤ Berechnen Sie den Gradienten im Punkt für $x = 2$ und $y = 1$

$\boxed{Ü}$ für $f(x,y) = 2xy - 3x^2 + \frac{1}{y}$

$f_x(x,y) = 2y - 6x \qquad f_x(2,1) = -10$

$f_y(x,y) = 2x - \frac{1}{y^2} \qquad f_y(2,1) = 3$

$$\text{grad}_f(2,1) = \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

⑥ $z = f(x,y) = \ln(x^2+y^2) - e^{2xy} + 3x$

$f_x(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2} - 2y \cdot e^{2xy} + 3$

$f_y(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2} - 2xe^{2xy}$

NR: $(\ln(\widetilde{x^2+4}))' = \frac{1}{(x^2+4)} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+4}$

$(e^{2xy})' = 2y \cdot e^{2xy}$

⑦ $u = u(x,y,z) = 2x \cdot e^{yz} + \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

NR $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$

$u_x = 2e^{yz} + \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$

$= 2e^{yz} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2 \cdot x^{\frac{1}{2}}}$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$u_y = 2x \cdot e^{yz} \cdot z + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$= 2xz \cdot e^{yz} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$u_z = 2xye^{yz} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

⑧ $f(x,y) = y \cdot e^{x^2+y^2}$

$f_x(x,y) = y \cdot e^{x^2+y^2} \cdot 2x = 2xy \cdot e^{x^2+y^2}$ (Kettenregel)

$f_y(x,y) = 1 \cdot e^{x^2+y^2} + y \cdot 2y \cdot e^{x^2+y^2}$

$= e^{x^2+y^2} + 2y^2 \cdot e^{x^2+y^2}$

Produktregel in Verb. mit Kettenregel

NR: $f(x) = \underset{u}{x} \cdot \underset{v}{e^x}$

$f'(x) = u'v + uv'$

$= e^x + x \cdot e^x$

Produktregel

⑨ Üb. für Zuhause : $f(x,y) = \dfrac{e^x \cdot \sin(y)}{e^y \cdot \cos(x)}$

Bestimmen Sie : f_x, f_y

Partielle Ableitungen höheres Ordnung

Wenn die partiellen Ableitungen $\boxed{\text{1. Ordnung}}$ nocheinmal jeweils nach x bzw. y abgeleitet werden, erhält man die partiellen Ableitungen $\boxed{\text{2. Ordnung}}$

$$z_{xx} = f_{xx}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(f_x(x,y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}$$

Zweimal nach x abgeleitet!

Entsprechend : z_{yy}

z_{xy} Insgesamt 4 partielle Abl. 2. Ordnung

z_{yx}

z_{xx}, z_{yy} heißen direkte Ableitungen!

Ausgeführt "von links nach rechts"

z.B. z_{xyxx} $\hat{=}$ zuerst nach x
dann nach y
dann nach x
dann nach x

Satz von Schwarz: z.B. $z_{xy} = z_{yx}$

$z_{xxy} = z_{yxx} = z_{xyx}$

Partielle Ableitungen 1. Ordnung ⇒ Gradient (Vektor)

Partielle Ableitungen 2. Ordnung ⇒ Hesse Matrix (Matrix)

$$H(x) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ & & f_{x_ix_j} & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & \cdots & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

j-te Spalte

i-te Zeile

Hesse-Matrix
Jacobi-Matrix
Funktionalmatrix

Bp: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^2 \cdot x_3 + x_3$

Bilden Sie die Hesse-Matrix!

$f_{x_1} = 3x_1^2$ $\qquad$ $f_{x_1 x_1} = 6x_1$

$f_{x_2} = 2x_2 \cdot x_3$ $\qquad$ $f_{x_1 x_2} = 0$

$f_{x_3} = x_2^2 + 1$ $\qquad$ $f_{x_2 x_1} = 0$

$f_{x_2 x_2} = 2x_3$

$f_{x_2 x_3} = 2x_2 = f_{x_3 x_2}$

$f_{x_3 x_1} = 0$

$f_{x_3 x_3} = 0$

$$H(x) = \begin{pmatrix} 6x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2x_3 & 2x_2 \\ 0 & 2x_2 & 0 \end{pmatrix}$$