Vorlesung Mathe 2 26.5.2014

Partielles und totales Differenzial

Wdh. Der Begriff des Differenzials

Ersetzt man den Funktionswert $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ durch den zugehörigen Wert der Tangente, also

$$(x+\Delta x, f(x) + \underbrace{f'(x)}_{\substack{\text{Steigung der}\\ \text{Tangente}\\ \text{in } (x, f(x))}} \cdot \Delta x)$$

$$f(x+\Delta x) \cong f(x) + f'(x)\cdot \Delta x$$

Man hat also den Funktionswert ersetzt durch den Wert der Tangente, also durch eine lineare Funktion

$f(x)$ wurde linearisiert

Für $\Delta x \to 0$ gilt: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) - f(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cdot \Delta x$

$$= f'(x)\cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x$$

$$dy = df = f'(x)\cdot dx$$

Differenzial der Fkt. $y = f(x)$

Differenzial der Variablen x

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Übertragung auf 3D:

$\Rightarrow$ 2 Partielle Differenziale: $d_x f = f_x \cdot dx$

$$d_y f = f_y \cdot dy$$

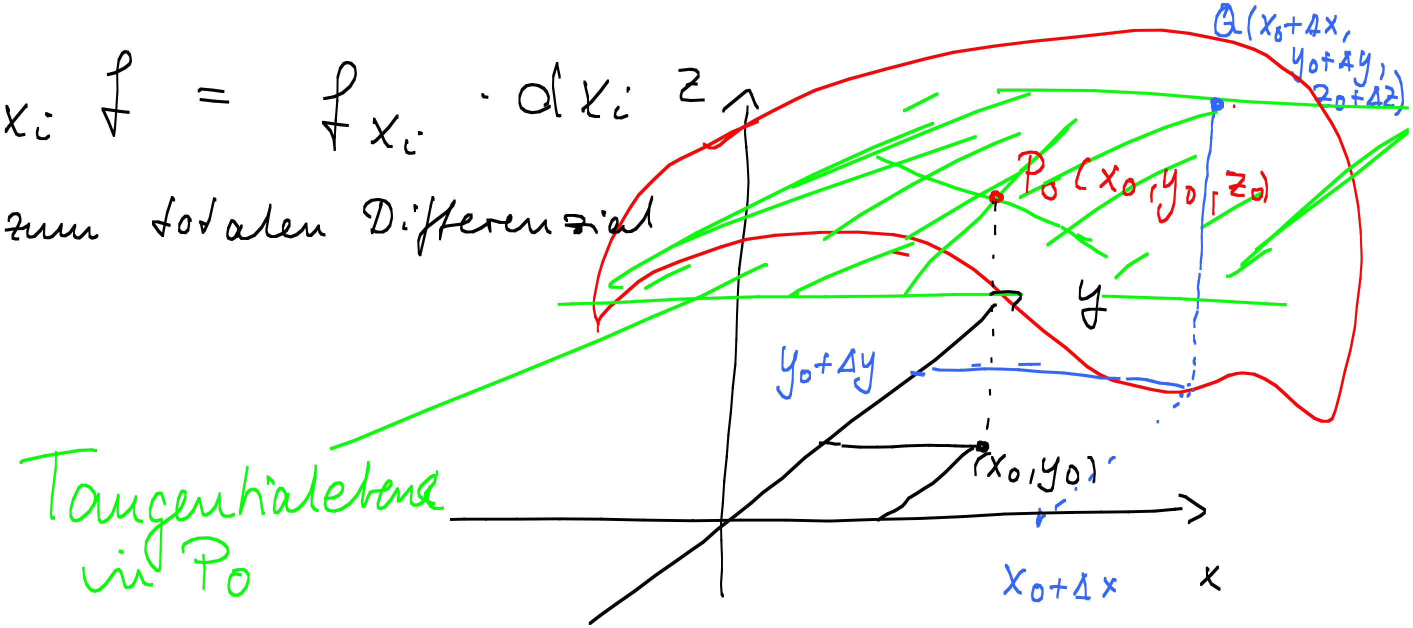
Übertragung auf den n-dimensionalen Raum:

Geg: $f: D \to \mathbb{R}$ $\quad D \subseteq \mathbb{R}^n$ $\quad y = f(x_1, \ldots, x_n)$

Dann lautet das partielle Differential nach der der Variablen x_i $\quad (i = 1, \ldots, n)$

$$d_{x_i} f = f_{x_i} \cdot dx_i$$

Vorbetrachtungen zum totalen Differenzial



Ziel: Änderung der Höhenkoordinate bei $x_0 \to x_0 + \Delta x$

$y_0 \to y_0 + \Delta y$

wird angenähert berechnet durch den Wert auf der Tangentialebene im Punkt P_0

Herleitung der Gleichung der Tangentialebene an eine Fläche mit $f(x,y) = f$

allg: $\boxed{z = ax + by + c}$

Im Berührpunkt: $z_x = a$

$z_y = b$

$$\boxed{\begin{aligned} f_x(x_0,y_0) &= a \\ f_y(x_0,y_0) &= b \end{aligned}} \quad (*)$$

$P(x_0,y_0,z_0)$ erfüllt auch die Gleichung der Tangentialebene

$$z_0 = a x_0 + b y_0 + c \implies c = z_0 - \underset{\substack{\uparrow\\ (*)}}{a} x_0 - \underset{\substack{\uparrow\\ (*)}}{b} y_0$$

Mit $(*)$: $z = f_x(x_0,y_0)\cdot x + f_y(x_0,y_0)\cdot y + z_0 - f_x(x_0,y_0)\cdot x_0 - f_y(x_0,y_0)\cdot y_0$

$$z = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + z_0$$

$$\boxed{z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}$$

Nun zum Totalen Differential:

Fragestellung: $P(x_0, y_0, z_0)$ wird in der Def.ebene um Δx_0 und Δy_0 verschoben

Wie ändert sich annäherungsweise der Funktionswert?

$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ Zuwachs der Höhenkoord.

Die Verschiebung auf der Tangentialebene:

$$\Delta x = dx$$
$$\Delta y = dy$$

Änderung der Höhenkoordinate auf der Tangentialebene

$$\underbrace{z - z_0}_{dz} = f_x(x_0, y_0)\underbrace{(x - x_0)}_{\substack{x_0 + \Delta x - x_0 \\ = \Delta x = dx}} + f_y(x_0, y_0)\underbrace{(y - y_0)}_{dy}$$

$$dz = \underbrace{f_x(x_0, y_0)\,dx}_{\text{Differenzial nach } x} + \underbrace{f_y(x_0, y_0)\,dy}_{\text{Differenzial nach } y}$$

Def: Das totale oder vollständige Differenzial von $z = f(x, y)$ ist der lineare Differenzialausdruck

$$\boxed{dz = f_x\,dx + f_y\,dy}$$

Das totale oder vollständige Differential von $z = f(x_1, \dots, x_n)$ ist der lineare Differentialausdruck

$$\boxed{dz = f_{x_1}dx_1 + \dots + f_{x_i}dx_i + \dots + f_{x_n}dx_n}$$

Bsp: Geg. $z = f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$

1) Die x- und y-Koordinate für $x = 2$ und $y = 1$ werden um $dx = 0{,}5$ und $dy = 0.75$ verschoben. Berechnen Sie die Änderung der Höhenkoordinate annäherungsweise mit Hilfe des Totalen Differentials

$$f_x(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$f_y(x,y) = \qquad = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$dz = \frac{2x}{x^2+y^2} \cdot dx + \frac{2y}{x^2+y^2} \cdot dy$$

$$dz = \frac{2 \cdot 2}{2^2+1^2} \cdot 0.5 + \frac{2 \cdot 1}{2^2+1^2} \cdot 0.75$$

$$= \frac{4}{5} \cdot 0.5 + \frac{2}{5} \cdot 0.75 = 0.4 + 0.3 = 0.7$$

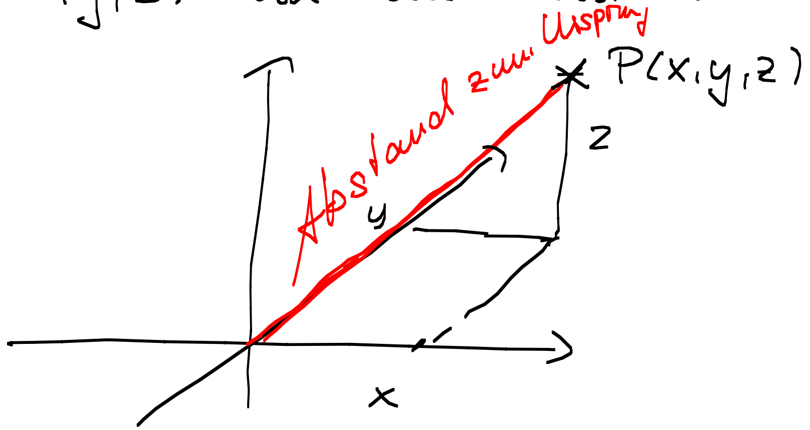
Wahre Funktionswertänderung:

$$\Delta z = |f(2,1) - f(2,5; 1,75)| = |\ln(4+1) - \ln(2,5^2+1,75^2)|$$

$$= |\ln 5 - \ln 9{,}312|$$

$$= |-0.62| = 0{,}62$$

2) Gegeben sei $P(x,y,z)$ ein Punkt im 3D-Raum



$$r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Frage: Wie ändert sich der Abstand zum Ursprung näherungsweise, (mit Hilfe des vol. Differenzials) wenn $A(1,2,0)$ in den Punkt $B(0{,}9,\ 2{,}2,\ -0{,}1)$ übergeht?

$$dr = r_x \cdot dx + r_y \cdot dy + r_z \cdot dz$$

$dx = -0{,}1$ $\quad dy = 0.2$ $\quad dz = -0{,}1$