

Vorlesung Mathe 2 28.5.14

Zum Bp. v. 26.5.14

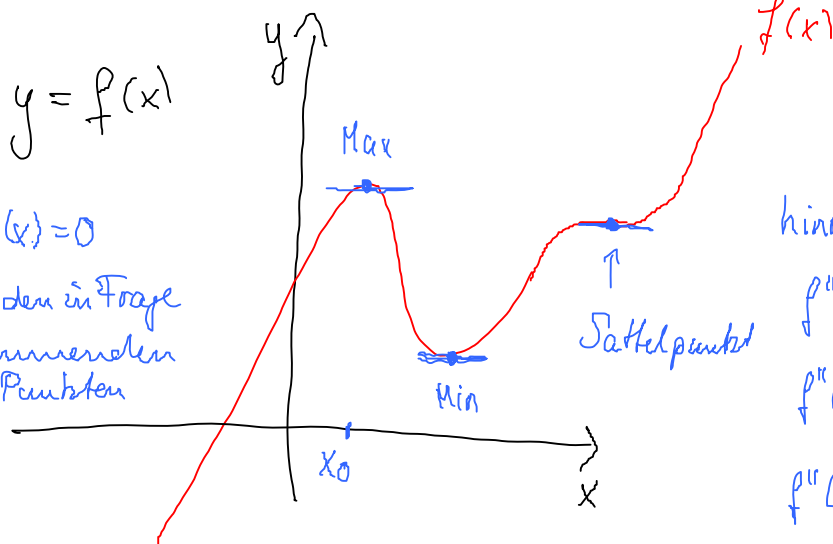
$$dr = \frac{x \cdot dx + y \cdot dy + z \cdot dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$dr = \frac{1 \cdot (-0,1) + 2 \cdot 0,2 + 0 \cdot (-0,1)}{\sqrt{5}} = 0,1342$$

Δr (wahre Änderung) : 0,1430

Erinnerung : $y = f(x)$

notwendig: $f'(x) = 0$
an den in Frage
kommenden
Punkten



hinreichend:

$$f''(x) > 0 \Rightarrow \text{Min}$$

$$f''(x) < 0 \Rightarrow \text{Max}$$

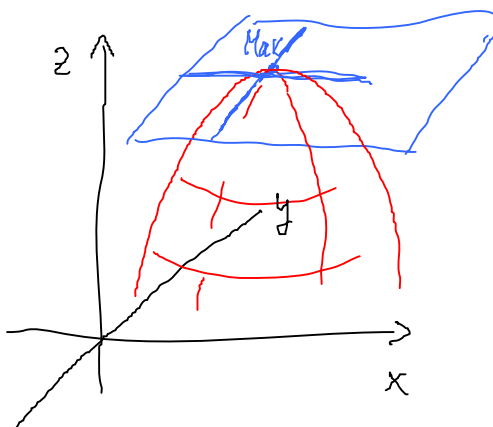
$$f''(x) = 0 \Rightarrow \text{evtl.}$$

Sattelpunkt

min: $z = f(x, y)$

notwendig $f_x(x, y) = 0$

$f_y(x, y) = 0$



Notwendige Bedingung bei $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

(Fkt. mit n unabhängigen Variablen)

$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ ist möglicher Extremwert

$\Leftrightarrow f_{\bar{x}_1} = f_{\bar{x}_2} = \dots = f_{\bar{x}_n} = 0$

Vorgehen bei der Suche nach Extremwerten:

Sämtliche partielle Ableitungen gleich Null setzen

$\Rightarrow$ Kandidaten

Hinreichende Bedingungen für die Existenz eines Min. bzw. Max

für $z = f(x, y)$ $n=2$

Die partiellen Ableitungen 2. Ordnung erfüllen folgende

Ungleichung: $\Delta = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) > 0$

Hesse'sche Determinante

$$f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow \text{rel. Maximum}$$

$$f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow \text{rel. Minimum}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \overset{+}{f_{xx}} & \overset{-}{f_{xy}} \\ \underset{-}{f_{yx}} & \underset{+}{f_{yy}} \end{vmatrix} = f_{xx} \cdot f_{yy} - \underbrace{f_{xy} \cdot f_{yx}}_2 = f_{xy}^2$$

(Satz v. Schwarz)

Falls $\Delta < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt

$\Delta = 0 \Rightarrow$ keine Entscheidung zu treffen

Bsp. gleich

Zunächst: $z = f(x_1, \dots, x_n)$

und $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ sei Kandidat

(kann als Lösung heraus bei $\text{grad}_f(\bar{x}) = 0$)

$H(\bar{x})$ ist die Hesse Matrix der 2. partiellen Ableitungen

$$H(\bar{x}) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(\bar{x}) & f_{x_1 x_2}(\bar{x}) & \dots & f_{x_1 x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & & & \vdots \\ & f_{x_i x_j}(\bar{x}) & & \\ \vdots & & & \vdots \\ f_{x_n x_1} & \dots & \dots & f_{x_n x_n}(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

Sei $H_i = \begin{vmatrix} f_{x_1 x_1} & \dots & f_{x_1 x_i} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_i x_1} & \dots & f_{x_i x_i} \end{vmatrix}$ die Hauptunterdeterminante
 $i = 1, \dots, n$

$\bar{x}$ lokales Max $\Leftrightarrow H_1 < 0, H_2 > 0, H_3 < 0, \dots$

$$H_n \begin{cases} < 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ > 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

$\bar{x}$ lokales Min $\Leftrightarrow H_1 > 0, H_2 > 0, H_3 > 0, \dots, H_n > 0$

Bp: ① $z = f(x, y) = x^3 - 12xy + 6y^2$ Extremwerte?

Lösung: $f_x = 3x^2 - 12y$ $f_{xx} = 6x$

$$f_y = -12x + 12y \quad f_{yy} = 12$$

$$f_{xy} = f_{yx} = -12$$

Kandidaten für Extremwerte:

$$f_x = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12y = 0 \quad \text{I}$$

$$f_y = 0 \Leftrightarrow -12x + 12y = 0 \quad \text{II}$$

$$\text{Aus II: } 12y = 12x \quad |:12$$

$$\Leftrightarrow x = y \quad *$$

$$* \text{ in I: } 3x^2 - 12x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 = 12x$$

Lösung 1: $x = 0$

Lösung 2: $3x^2 = 12x \quad |:x \quad (x \neq 0)$

$\Rightarrow 3x = 12 \quad |:3$

$\Rightarrow x = 4$

Kandidaten sind also: $(0,0)$ und $(4,4)$

Überprüfen der hinreichenden Bedingungen:

Kandidat 1

$$f_{xx}(0,0) = 0$$

$$f_{yy}(0,0) = 12$$

$$f_{xy}(0,0) = -12$$

$$\begin{aligned} \Delta(0,0) &= f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \\ &= 0 \cdot 12 - (-12)^2 \\ &= -144 < 0 \end{aligned}$$

Sattelpunkt an der Stelle $(0,0)$

Kandidat 2

$$f_{xx}(4,4) = 24$$

$$f_{yy}(4,4) = 12$$

$$f_{xy}(4,4) = -12$$

$$\begin{aligned} \Delta(4,4) &= f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \\ &= 24 \cdot 12 - (-12)^2 \\ &= 144 > 0 \end{aligned}$$

Weitere Berechnungen:

$$f_{xx}(4,4) = 24 > 0$$

$\Rightarrow$ Minimum an der Stelle $(4,4)$

$$(2) \quad z = f(x, y) = x - 8y - x^2 + x \cdot y - y^2$$

Untersuchen Sie diese Funktion auf Extremwerte.

$$f_x = 1 - 2x + y = 0 \quad (\Rightarrow) \quad 2x = 1 + y \quad (\Rightarrow) \quad x = \frac{1}{2}(1+y) \quad (*)$$

$$f_y = -8 + x - 2y = 0 \quad (\Rightarrow) \quad -8 + \frac{1}{2}(1+y) - 2y = 0$$

mit (*)

$$(\Rightarrow) \quad -8 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y - 2y = 0$$

$$(\Rightarrow) \quad -\frac{15}{2} = 2y - \frac{1}{2}y$$

$$(\Rightarrow) \quad -\frac{15}{2} = \frac{3}{2}y \quad | \cdot 2$$

$$(\Rightarrow) \quad -15 = 3y \quad | : 3$$

$$(\Rightarrow) \quad y = -5 \quad (**)$$

$$(**) \text{ in } (*): \quad x = \frac{1}{2}(1-5) \quad (\Rightarrow) \quad x = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} \quad (\Rightarrow) \quad x = -2$$

Kandidat: $(-2, -5)$

$$f_{xx} = -2 \quad f_{yy} = -2 \quad f_{xy} = 1$$

$$\Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = -2 \cdot -2 - 1^2 = 4 - 1 = 3 > 0$$

$$f_{xx}(-2, -5) = -2 < 0$$

$\Rightarrow$ Maximum bei $(-2, -5)$

Koordinaten des Maximums: $(-2, -5, f(-2, -5))$

$$\begin{aligned} f(-2, -5) &= -2 - (8 \cdot -5) - (-2)^2 + (-2) \cdot (-5) - (-5)^2 \\ &= -2 + 40 - 4 + 10 - 25 \\ &= 19 \end{aligned}$$

Max $(-2, -5, 19)$

③ zu Hause: $z = f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1^3 - 3x_1} - x_2^2 + x_2 \cdot x_3 - x_3^2 + 3x_3$
Extremwerte?