Vorlesung Mathe 2

2.6.2014

Bp. $z = f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1^3 - 3x_1} - x_2^2 + x_2 \cdot x_3 - x_3^2 + 3x_3$

$$f_{x_1} = (3x_1^2 - 3) \cdot e^{x_1^3 - 3x_1} = 0 \quad \text{I}$$

$$f_{x_2} = -2x_2 + x_3 = 0 \quad \text{II}$$

$f_{x_3} = x_2 + 2x_3 + 3 = 0$ III

Aus I : $3x_1^2 - 3 = 0$ (e-Fkt nie Null!)

$\Leftrightarrow 3x_1^2 = 3$

$\Leftrightarrow x_1^2 = 1$

$\Rightarrow x_{11} = 1 \quad x_{12} = -1$

Aus II und III

$-2x_2 + x_3 = 0$ II

$x_2 - 2x_3 + 3 = 0$ III

II + 2 · III : $-3x_3 = -6 \Leftrightarrow x_3 = 2$ (*)

(*) in II : $-2x_2 + 2 = 0 \quad | -2 \quad : -2$

$x_2 = 1$

Kandidaten:

$$x_{E_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad x_{E_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f_{x_1 x_1} = 6x_1 \cdot e^{x_1^3 - 3x_1} + (3x_1^2 - 3)^2 \cdot e^{x_1^3 - 3x_1}$$

$$f_{x_1 x_2} = 0 \qquad f_{x_3 x_1} = 0$$

$$f_{x_1 x_3} = 0 \qquad f_{x_3 x_2} = 1$$

$$f_{x_2 x_1} = 0 \qquad f_{x_3 x_3} = -2$$

$$f_{x_2 x_2} = -2$$

$$f_{x_2 x_3} = 1$$

$x_{E_1}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$:

$$H_3 = \begin{vmatrix} 6e^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 6e^{-2} & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 6e^{-2}\cdot(-2) - 0$$
$$= -12e^{-2} < 0$$

$$H_1 = \left| 6e^{-2} \right| > 0$$

Hier keine Entscheidung über die Art des Extremwerts möglich!

$$x_{E_2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} : \quad H_3 = \begin{vmatrix} -6e^{t^2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} + & - \end{array}$$

$$H_2 > 0 \qquad H_2 = \begin{vmatrix} -6e^{t^2} & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = +12e^{-2} - 0 = 12e^{-2} > 0$$

$$H_1 < 0 \qquad H_1 = \left| -6e^{t^2} \right| < 0$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} -6e^2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -6e^2 \left((-2)\cdot(-2) - 1\cdot 1 \right)$$

Entwicklung nach der ersten Spalte

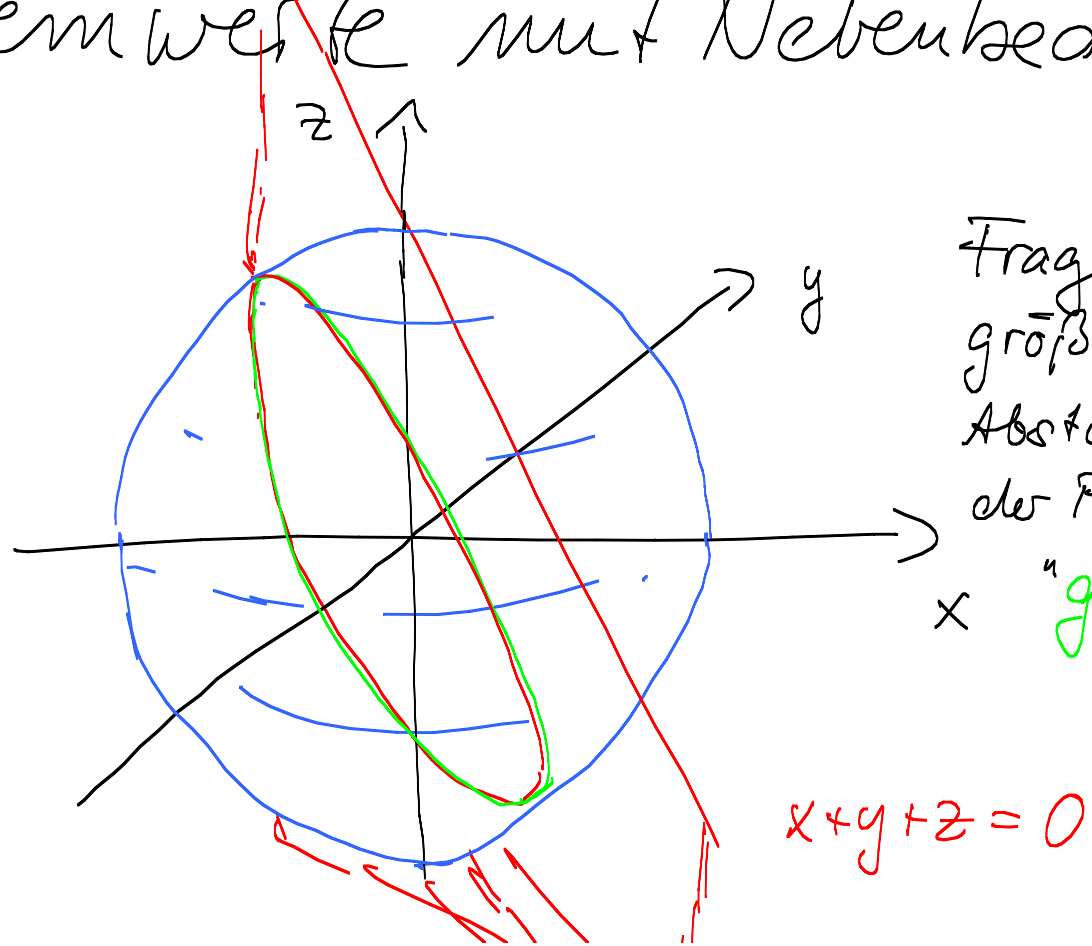
$$= -6e^2 \,(4 - 1) = 3\cdot(-6)\cdot e^2$$

$$= -18e^2 < 0$$

$$H_1 < 0, \quad H_2 > 0, \quad H_3 < 0$$

lokales Maximum bei $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Extremwerte mit Nebenbedingungen

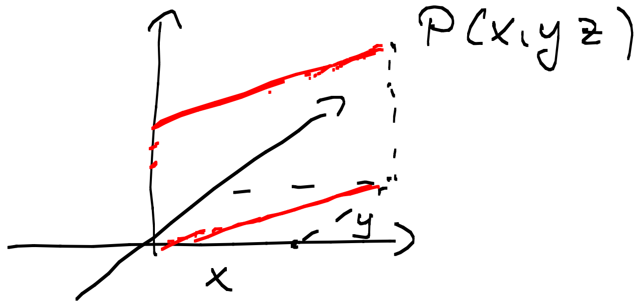


Frage:
größter bzw. kleinster Abstand zur z-Achse der Punkte auf dem "grünen" Kreis?

Gleichung der Kugel: $x^2+y^2+z^2=1$

Gleichung der Ebene: $x+y+z=0$

Zielfunktion: Abstand von z-Achse: $d=\sqrt{x^2+y^2}$



Gesucht sind die Extremwerte von $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$

unter den Nebenbedingungen: $x^2+y^2+z^2=1$ (Kugel)

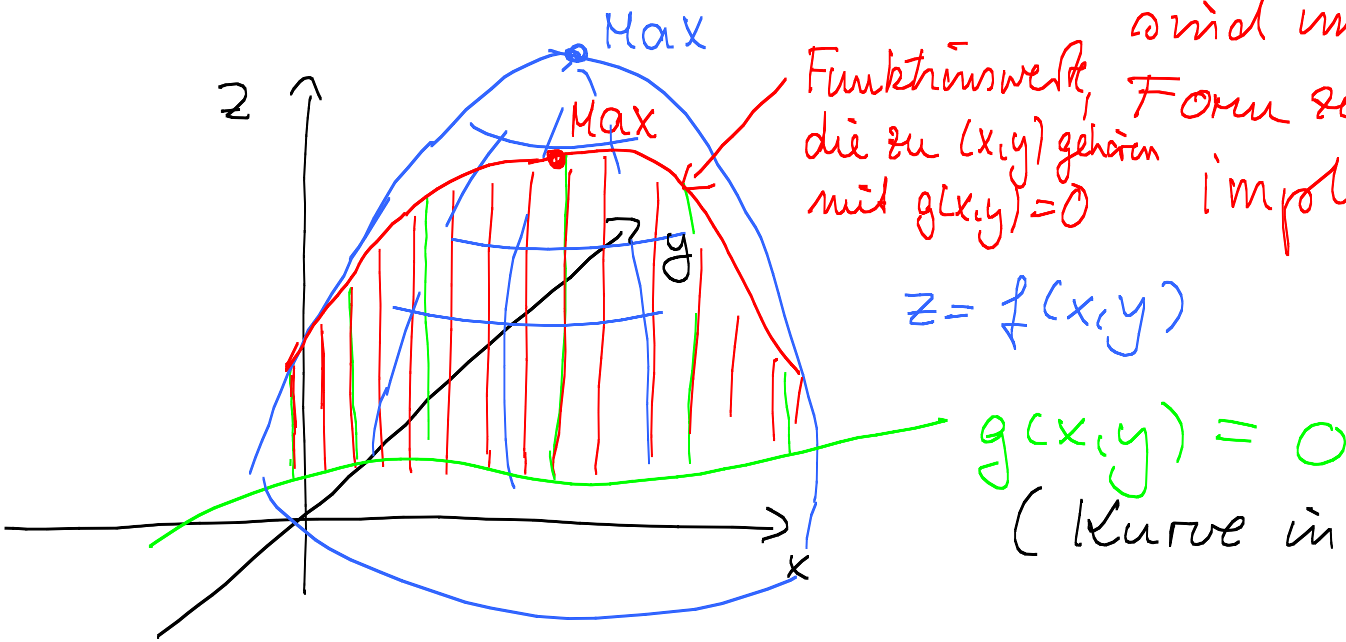
und $x+y+z=0$ (Ebene)

Extremwertaufgabe mit 2 Nebenbedingungen

Allgemein: Geg. $z = f(x,y)$ Zielfunktion
(2 Veränderliche)

1 Nebenbed. $g(x,y) = 0$

Nebenbedingungen sind immer auf diese Form zu bringen: implizit



(Kurve in x, y - Ebene)

Für Funktionen mit 2 unabh. Variablen gibt es
2 Lösungswege

① Variablensubstitution

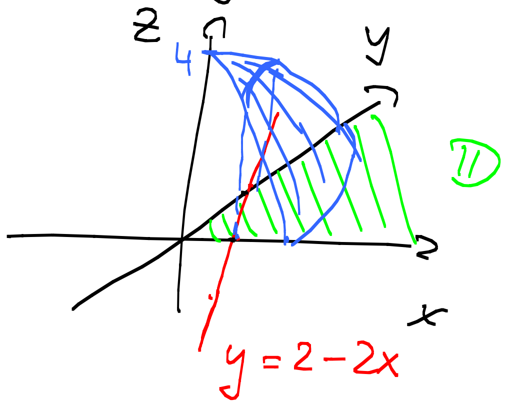
(siehe z.B. diverse „Dosenprobleme" im WS)

Falls $g(x,y) = 0$ (Nebenbedingung) nach x oder y aufgelöst werden kann, so wird die aufgelöste Gl. in die Zielfunktion eingesetzt!

Bp: $z = f(x,y) = -x^2 - \frac{1}{2}y^2 + 4 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}_+^2$

NB: $g(x,y) = 2 - 2x - y = 0$

$\iff y = 2 - 2x \quad (*)$



$(*)$ in $f(x,y)$:

ersetzt

$$f(x, \ldots) = -x^2 - \frac{1}{2}(2-2x)^2 + 4$$

$$z = -x^2 - \frac{1}{2}(4 - 8x + 4x^2) + 4$$

$$= -x^2 - 2 + 4x - 2x^2 + 4$$

$$= -3x^2 + 4x + 2$$

$z' = -6x + 4$

$z' = 0 \iff 6x = +4$

$x = +\frac{2}{3}$

$z'' = -6 \implies$ MAX

$y = 2 - \frac{2}{3} \cdot 2$

Lokales Max. bei $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

2 Lösung mit Hilfe der Lagrange-Methode

Lagrange (1736 – 1813)

zunächst: Einführung der Multiplikatoren-methode für $z = f(x,y)$ und $g(x,y) = 0$

Fkt. m. 2 Variablen und einer NB

Lagrange: Die Extremwerte von $z = f(x,y)$ unter der NB $g(x,y) = 0$ liegen an den Stellen, an denen

$$V(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y)$$

ihre Extremwerte annimmt!

Funktion und Nebenbed. werden mit Hilfe des Multiplikators λ zu einer einzigen Funktion zusammengebaut!

λ ist eine zusätzliche Variable

hier: 2 Variablen x, y

$\longrightarrow$ 3 Variablen x, y, λ

Berechnung der Kandidaten wie bisher

$$\left.\begin{aligned}
V_x &= f_x(x,y) + \lambda \cdot g_x(x,y) &= 0 \\
V_y &= f_y(x,y) + \lambda\, g_y(x,y) &= 0 \\
V_\lambda &= g(x,y) &= 0
\end{aligned}\right\} \text{notwendige Bedingungen}$$

Bp: $z = f(x,y) = -x^2 - \frac{1}{2}y^2 + 4$ $\quad \mathbb{D} = \mathbb{R}_+^2$

$$g(x,y) = 2 - 2x - y = 0$$

$$V(x,y,\lambda) = -x^2 - \frac{1}{2}y^2 + 4 + \lambda \cdot (2 - 2x - y)$$

Notwendige Bed:

$$\text{I} \quad V_x = -2x - 2\lambda = 0$$

$$\underline{\text{II}} \quad V_y = -y - \lambda = 0$$

$$\underline{\text{III}} \quad V_\lambda = 2 - 2x - y = 0$$

Aus I: $2x = -2\lambda \Rightarrow \boxed{\lambda = -x}$

Aus II: $\boxed{-y = \lambda}$

$\Rightarrow x = y \quad (*)$

$\circledast$ in $\underline{\text{III}}$: $2 - 2x - x = 0$

$$\Longleftrightarrow 3x = 2$$

$$\Longleftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

Also: $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{2}{3}$

Bp Dosenproblem: Lösen mit der Lagrange-Methode

Dosen mit $V = 1\,\ell$ und minimalem Materialverbrauch