Vorlesung Mathe 2
4. 6. 2014

Methode von Lagrange für Fkt. mit 2 Variablen

$$v(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y)$$

Lagrange-Multiplikator

Methode von Lagrange für Fkt. mit n Variablen und k Nebenbedingungen

$f: D \to \mathbb{R} \quad D \subset \mathbb{R}^n$

$x = (x_1, \ldots, x_n)$

$z = f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$

Nebenbed: $z_j = g_j(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad j = 1, \ldots, k$

$$L\underbrace{(x_1, x_2, \ldots x_n, \lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_k)}_{\text{n+k Variablen}} = f(x_1, \ldots x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \ldots x_n) + \ldots + \lambda_k g_k(x_1, \ldots x_n)$$

$$= f(x) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j g_j(x) \qquad x = (x_1, \ldots x_n), \quad \lambda = (\lambda_1, \ldots \lambda_k)$$

Notwendige Bedingungen

Für L_{x_i} und L_{λ_j} $\quad i = 1, \ldots n$, $j = 1, \ldots k$ gilt:

$$L_{x_i} = 0$$

$$L_{\lambda_j} = 0$$ (→ das sind die Nebenbedingungen)

Kandidaten, die sich aus diesem GS mit n+k Unbekannten ergeben: $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots x_n^*)$

Bedeutung der Lagrange-Multiplikatoren → später

Hinreichende Bedingung sehr kompliziert

Hier: Für eine Fkt. mit <u>n</u> Variablen und <u>einer</u> NB

$f: D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ besitze stetige partielle Abl. 1.+2. Ordn.

$$L(x, \lambda) = L(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda g(x_1, \ldots, x_n)$$

$$L_{x_1}(x^*) = L_{x_2}(x^*) \ldots = L_{x_n}(x^*) = 0$$

$$\Rightarrow x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \quad \text{Kandidat}$$

x^* ist lokales Maximum, falls

$$G_2 > 0,\ G_3 < 0,\ \ldots\ G_n \begin{cases} > 0 & n \text{ gerade} \\ < 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

x^* ist lokales Minimum, falls

$$G_2 < 0,\ G_3 < 0,\ \ldots\ G_n < 0$$

$$G_2 = \begin{vmatrix} L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} & g_{x_1} \\ L_{x_2x_1} & L_{x_2x_2} & g_{x_2} \\ g_{x_1} & g_{x_2} & 0 \end{vmatrix} \quad \ldots \quad G_n = \begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad\qquad\quad L_{\lambda x_1} \\ \begin{vmatrix} L_{x_1x_1} & \ldots & L_{x_1x_n} & g_{x_1} \\ \vdots & & & \\ L_{x_nx_1} & \ldots & L_{x_nx_n} & g_{x_n} \\ g_{x_1} & \ldots & g_{x_n} & 0 \end{vmatrix} \end{array}$$

Bp: $f: D \to \mathbb{R}$ $\quad D \subset \mathbb{R}^3$

$$z = f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}$$

NB: $g(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 - 3a = 0$

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} + \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 3a)$$

notw. Bed.

$\underline{I}$ $L_{x_1} = \frac{1}{2\sqrt{x_1}} + \lambda = 0$

$\underline{II}$ $L_{x_2} = \frac{1}{2\sqrt{x_2}} + \lambda = 0$

$\underline{III}$ $L_{x_3} = \frac{1}{2\sqrt{x_3}} + \lambda = 0$

$\underline{IV}$ $L_{\lambda} = x_1 + x_2 + x_3 - 3a = 0$

Aus $\underline{I}$ - $\underline{III}$:

$x_1 = x_2 = x_3$ (*)

(*) in $\underline{IV}$

$x_1 + x_1 + x_1 - 3a = 0$

$\Leftrightarrow 3x_1 = 3a$

$\Leftrightarrow x_1 = a$

mit (*) : $x_1 = x_2 = x_3 = a$

Kandidat : (a, a, a)

$$L_{x_1x_1} = -\frac{1}{4}x_1^{-\frac{3}{2}}$$

NR: $L_{x_1} = \frac{1}{2}\cdot x_1^{-\frac{1}{2}} + \lambda$

$L_{x_1x_1} = -\frac{1}{4}x_1^{-\frac{3}{2}}$

$$L_{x_1x_2} = 0$$

$$L_{x_1x_3} = 0$$

$$G_2 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{4}x_1^{-\frac{3}{2}} & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{4}x_2^{-\frac{3}{2}} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$L_{x_2x_1} = 0$$

$$L_{x_2x_2} = -\frac{1}{4}x_2^{-\frac{3}{2}}$$

$$G_3 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{4}x_1^{-\frac{3}{2}} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{4}x_2^{-\frac{3}{2}} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4}x_3^{-\frac{3}{2}} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$L_{x_2x_3} = 0$$

$$L_{x_3x_3} = -\frac{1}{4}x_3^{-\frac{3}{2}}$$

$$g_{x_1} = 1$$

$$g_{x_2} = 1$$

$$g_{x_3} = 1$$

$$G_2 \underset{\text{Sarrus}}{=} \frac{1}{4}x_2^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}x_1^{-\frac{3}{2}}$$

$$G_2(a,a,a) > 0$$

$$G_3 \underset{\uparrow}{=} -\frac{1}{4}x_1^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{4}x_2^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{4}x_3^{-\frac{3}{2}}\right) - \frac{1}{16}x_2^{-\frac{3}{2}} \cdot x_3^{-\frac{3}{2}}$$

Entwicklung nach einer Spalte, dann Sarrus

$$G_3(a,a,a) < 0$$

$G_2 > 0,\ G_3 < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum bei $(a,a,a,f(a))$

Zurück zum Eingangsbeispiel vom Montag:

$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$ Abstand von z-Achse

$g_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 = 0$

$g_2(x,y,z) = x+y+z = 0$

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = \sqrt{x^2+y^2} + \lambda_1(x^2+y^2+z^2-1) + \lambda_2(x+y+z)$$

$$L_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \qquad \text{I}$$

$$L_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \qquad \text{II}$$

$$L_z = 2\lambda_1 z + \lambda_2 = 0 \qquad \text{III}$$

$$L_{\lambda_1} = x^2+y^2+z^2-1 = 0 \qquad \text{IV}$$

$$L_{\lambda_2} = x+y+z = 0 \qquad \text{V}$$

Aus I: $\lambda_2 = -\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2\lambda_1 x\right)$

Aus II: $\lambda_2 = -\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2\lambda_1 y\right)$

Also $x = y$ oder $\lambda_2 = 0$

in V: $2x+z=0$

$z=-2x$

in IV: $x^2+x^2+4x^2=1$

$6x^2=1$

Aus III: $2\lambda_1 \cdot z = 0$

$z=0$ oder $\lambda_1 = 0$

$\Downarrow$ V

$x=-y$ (*)

$\Downarrow$ I und II

$$x^2 = \frac{1}{6}$$

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{6}}$$

$$x_2 = \pm\frac{1}{6}\sqrt{6}$$

Kandidaten:

$P_1: \left(\frac{1}{6}\sqrt{6}, \frac{1}{6}\sqrt{6}, -\frac{1}{3}\sqrt{6}\right)$

$P_2: \left(-\frac{1}{6}\sqrt{6}, -\frac{1}{6}\sqrt{6}, \frac{1}{3}\sqrt{6}\right)$

$\Downarrow$ IV

$x^2 + x^2 = 1$

$x_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$x_4 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\Downarrow$ (*)

$y_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$y_4 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$x = y = 0$ mit $z = 0$ $\Downarrow$ zu IV λ_1 wird nicht 0

weitere Kandidaten:

$P_3: \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0\right)$

$P_4: \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 0\right)$

Funktionswerte:

$f\left(\frac{1}{6}\sqrt{6}, \frac{1}{6}\sqrt{6}, -\frac{1}{3}\sqrt{6}\right) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

$f(P_2) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

Punkte mit kleinstem Abstand von z-Achse

$f(P_3) = 1$

$f(P_4) = 1$

Punkte mit größtem Abstand von z-Achse

Interpretation des Lagrange-Multiplikators

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

$$\frac{L(x,y,\lambda) - f(x,y)}{g(x,y)} = \lambda$$

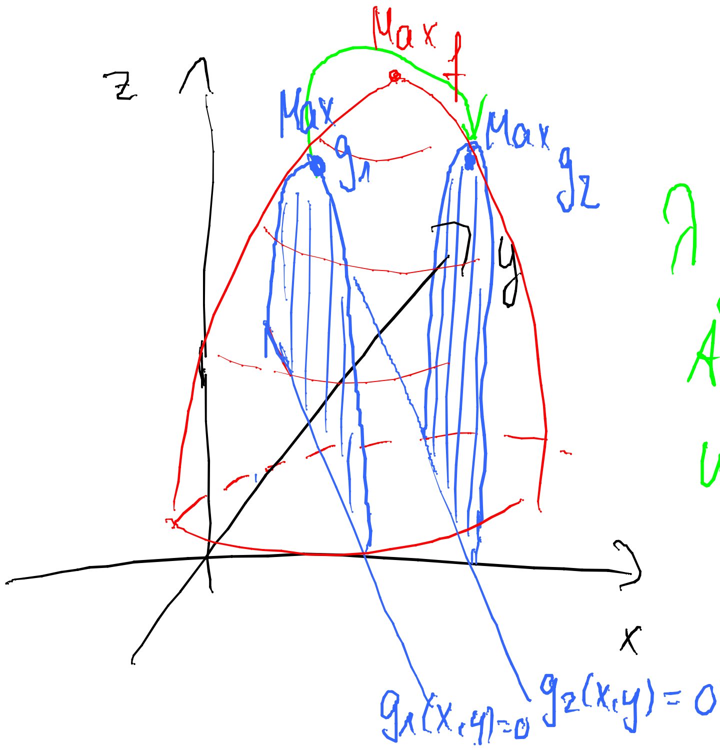
λ ist der Differenzialquotient der Fkt. L nach der Fkt. g

$$\lambda = \frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial g}$$

infinitesimale Änderungsrate der Lagrangefunktion L bei Änderung der Nebenbed. g

λ ist die marginale Änderungsrate

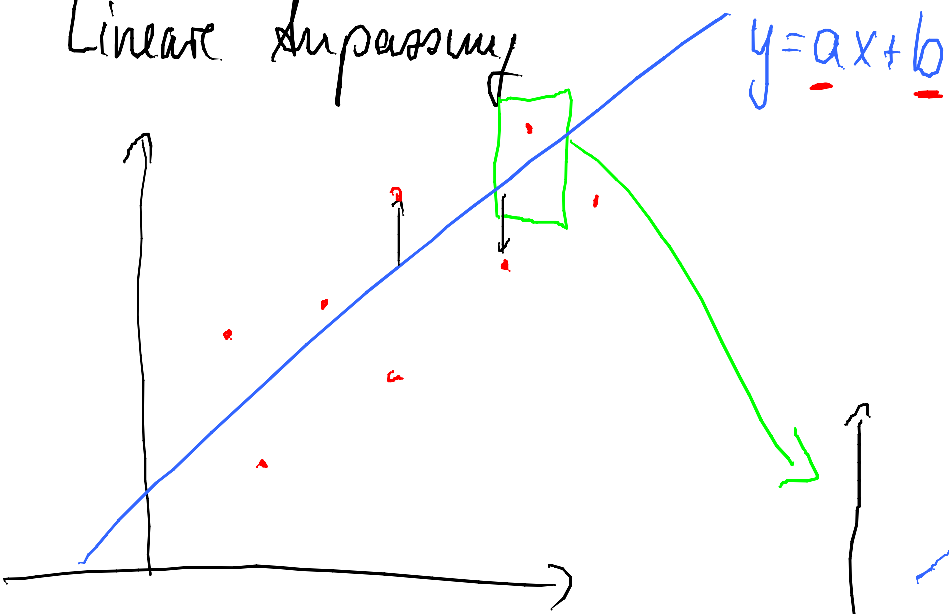
($\Rightarrow$ Marginalanalyse)

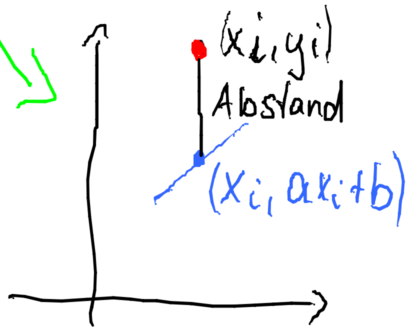


λ Maß für die Änderung der Max unter Änderung der Nebenbed.

Anwendung mehrdimensionale Analysis

Lineare Anpassung





$y_i - (ax_i + b)$ Abstand

Neb:
Quadrate, um
$\pm$ Abweichungen
gleichermaßen
zu berücksichtigen

Summe der Abstandsquadrate

$$Q(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (ax_i + b) \right]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2(ax_i + b)y_i + (ax_i + b)^2$$

Ziel: a, b (Variablen!) so bestimmen, dass $Q(a,b)$ minimal wird!

Schöne Pfingsttage!