

Vorlesung Mathe 2 23.6.14

Matrizendarstellung von Graphen

Graphen zwar anschaulich, aber man kann schlecht mit ihnen "rechnen"

⇒ Transformation in eine Matrix

Notwendig: feste Nummerierung von Knoten
feste Bezeichnung der Kanten

Def: Adjazenzmatrix für einen ungerichteten Graphen

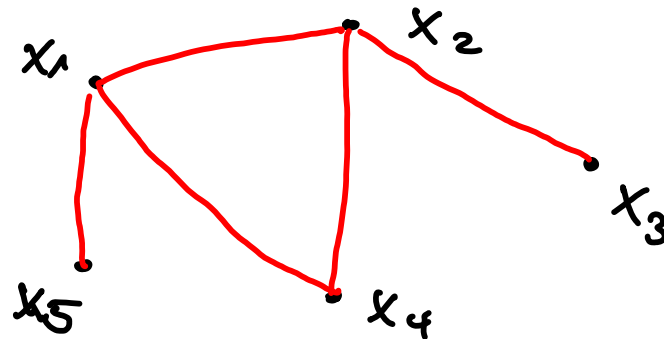
Sei G mit n Knoten

Die quadratische Matrix $A = (a_{ij})$ $i, j = 1, \dots, n$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } (x_i, x_j) \text{ Kante} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

A heißt Adjazenzmatrix

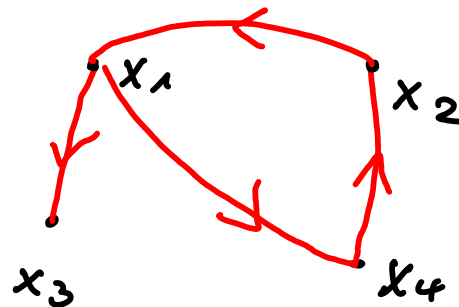
Bp:



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	1	0	1	1
x_2	1	0	1	1	0
x_3	0	1	0	0	0
x_4	1	1	0	0	0
x_5	1	0	0	0	0

für gerichtete Graphen (Digraph)

hier steht nur eine 1 bei einem "Pfeil" von x_i nach x_j .



	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	0	1	1
x_2	1	0	0	0
x_3	0	0	0	0
x_4	0	1	0	0

Verallgemeinerung (unger. Graph)

$$A = (a_{ij}) \text{ mit } a_{ij} = \begin{cases} k_i & \text{falls } i \neq j \text{ und } k_i \text{ Kanten } (x_i, x_j) \in x. \\ 2k_i & \text{falls } i = j \text{ und } k_i \text{ Schlingen in } x_i \in x. \end{cases}$$

Adjazenzmatrix, in der Schlingen und Mehrfachkanten sind.

Ist der Graph bewertet, dann

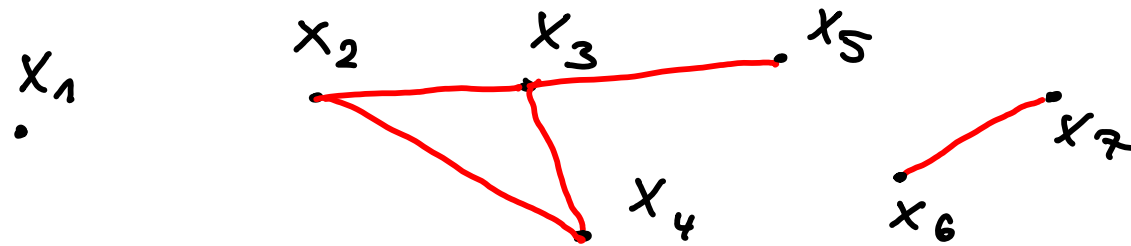
$$a_{ij} = \begin{cases} \text{Bewertung von Kante}(x_i, x_j) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bp:

Ges.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	0	0	0	0	0	0	0
x_2	0	0	1	1	0	0	0
x_3	0	1	0	1	1	0	0
x_4	0	1	1	0	0	0	0
x_5	0	0	1	0	0	0	0
x_6	0	0	0	0	0	1	1
x_7	0	0	0	0	0	1	0

Graph:



Sind nun Knoten und Kanten fest bezeichnet, so kann man die Darstellung über eine "Inzidenzmatrix" wählen!

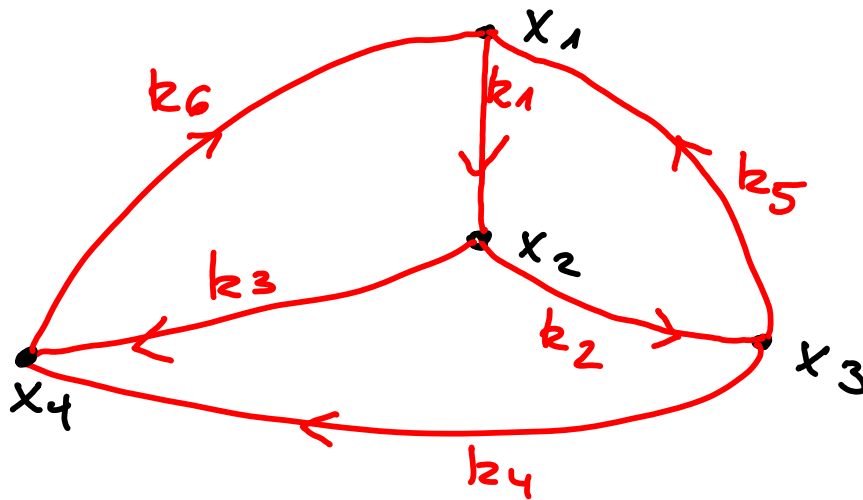
Def.: Inzidenzmatrix für ungerichteten Graphen

$$B = (b_{ij}) \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, n \text{ für Knoten } x_i \\ j = 1, \dots, k \text{ für Kanten } k_j \end{array}$$

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } k_j \text{ mit } x_i \text{ inzidiert} \\ 0 & \text{sonst} \\ 2 & \text{wenn } k_j \text{ Schlinge bei } x_i \end{cases}$$

Inzidenzmatrix für gerichtete Graphen

$$b_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{falls } k_j \text{ von } x_i \text{ ausgeht} \\ -1, & \text{falls } k_j \text{ in } x_i \text{ ankommt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$



$$\begin{matrix} & k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 & k_6 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

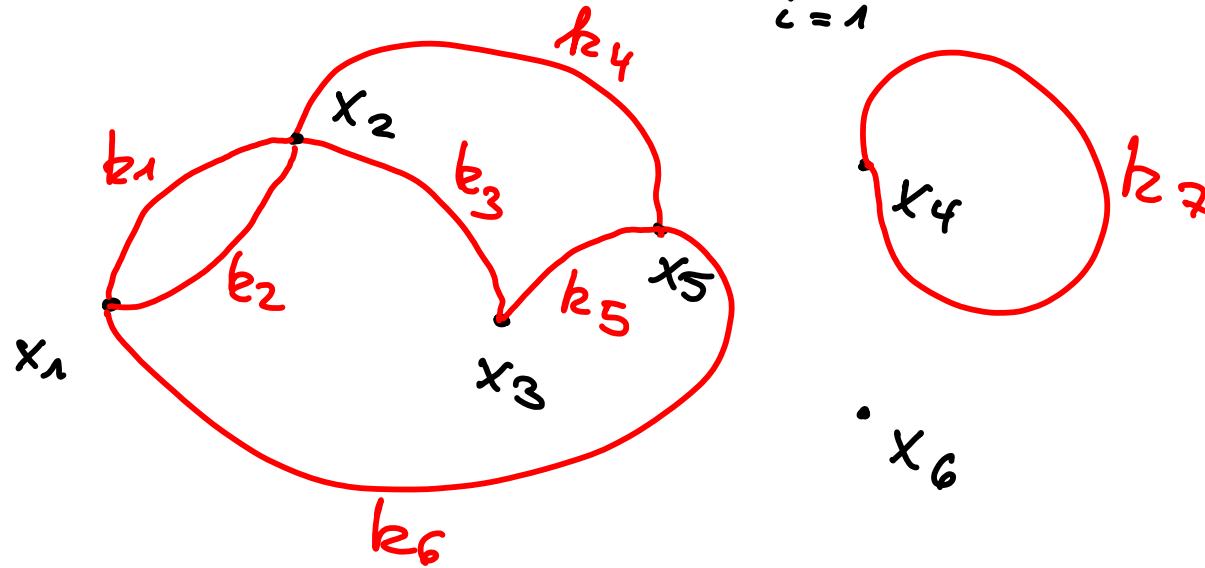
Einschub: Bemerkung über Knotengrade $d(x_i)$ ($\delta(x_i)$)
 In einem gerichteten Graphen gilt: (Schleifenfrei)

$$\sum_{i=1}^n d^+(x_i) = \sum_{i=1}^n d^-(x_i) = k$$

(Kantenanzahl)

für den ungerichteten Graphen gilt: $\sum_{i=1}^n d(x_i) = 2k$

Übung:



Adjazenzmatrix

Inzidenzmatrix

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	2	0	0	1	0
x_2	2	0	1	0	1	0
x_3	0	1	0	0	1	0
x_4	0	0	0	2	0	0
x_5	1	1	1	0	0	0
x_6	0	0	0	0	0	0

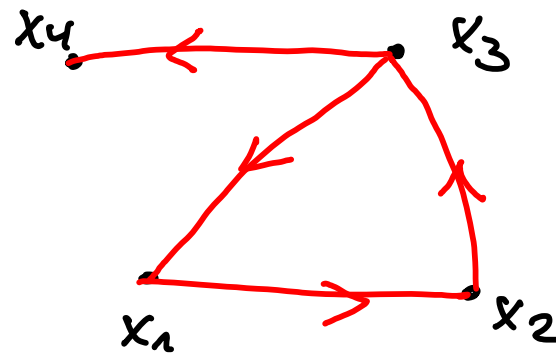
	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7
x_1	1	1	0	0	0	1	0
x_2	1	1	1	1	0	0	0
x_3	0	0	1	0	1	0	0
x_4	0	0	0	0	0	0	2
x_5	0	0	0	1	1	1	0
x_6	0	0	0	0	0	0	0

Bedeutung der Adjazenzmatrix

$$A^r = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{r\text{-mal}}$$

$a_{ij}^{(r)}$ in A^r gibt die Anzahl verschiedener
Pfeilfolgen der Länge r von x_i nach x_j
an!

Bp:



$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Adjazenzmatrix

Information darin z.B.

es ex. ein Weg der

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Länge 1 von x_1 nach x_2

$A \quad \cdot \quad A \quad = \quad A^2$

Interpretation von A^2 z.B. es ex. ein Weg der Länge 2
von x_1 nach x_3

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Weg der Länge 2 Weg der Länge 1

Zyklen der Länge 3

Def: Aus den Potenzen $A, A^2, \dots$ der Adjazenzmatrizen erhält man die sog. Wegematrix

für das Bp: $A + A^2 + A^3 + A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{x_i}_{x_j}$

es ex. ein Weg
↓ von x_i nach x_j

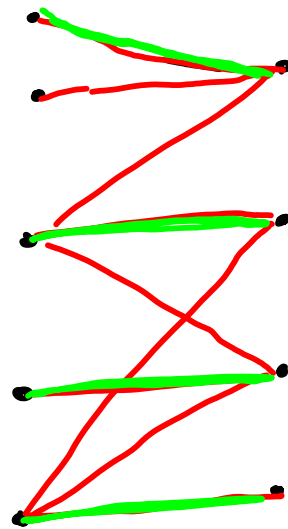
Wegematrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Beweis dieser Tatsache erfolgt mit Hilfe der vollständigen Induktion!

Weiteres Teilgebiet der Graphentheorie : Matching

Bipartiter Graph $G = (M, K)$ $M = A \cup B$

$$A \cap B = \emptyset$$



Es ex. nur Kanten zwischen
Knoten aus A mit Knoten aus B

Matching

Def: Matching

In einem Graphen eine Menge unabhängiger Kanten,
d.h. die Kanten sind paarweise nicht adjazent bzw.
nicht inzident

maximales Matching: Matching mit der größt möglichen
Anzahl von Kanten

perfektes Matching: Matching, das alle Knoten des
Graphen überdeckt.

(Vor.: $|A| = |B|$)