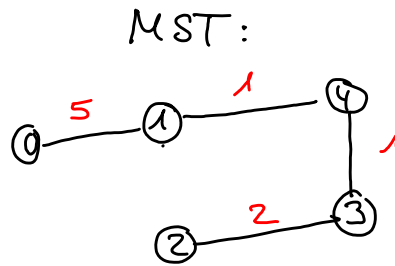
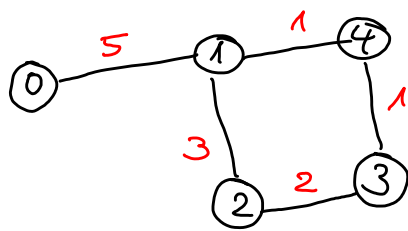


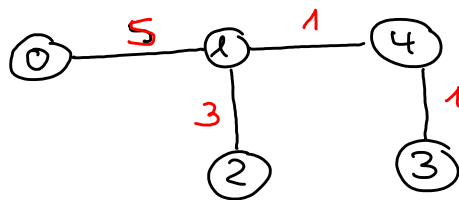
Vorlesung Mathe 2 30.6.14



Skript Konen

Andererseits: Suche nach den kürzesten Wegen von

0 ab:



Dijkstra-Algorithmus (1959) (Dijkstra 1930-2002)

bestimmt in einem gewichteten (positive Gewichte) (eoff. auch gerichteten)

Graphen die "kürzesten" Wege von einem zu allen

anderen Knoten (single source shortest paths)

bzw. zwischen zwei Knoten (all pairs shortest paths)

Bp: Routenplaner

Markierungsalgorithmus

zunächst: von einem Knoten zu allen anderen Knoten eines Graphen

Start: $G = (M, K, v, d)$ $d(k) \geq 0$ für alle $k \in K$

1) Startknoten x_0 erhält $D(x_0) = 0$

Setze $i=1$, $M_i := \{x_0\}$ weiter mit (2)

2) Sei M^* die Menge aller Knoten x_s der Kanten (x_r, x_s) , deren Knoten x_r in M_i liegt, d.h.

$$M^* = \{x_s \in M \setminus M_i \mid \text{es gibt eine Kante } (x_r, x_s) \text{ mit } x_r \in M_i\}$$

$M^* :=$ Menge der benachbarten Knoten von x_r

Falls $M^* = \emptyset$ weiter mit (6), $M^* \neq \emptyset$ weiter mit (3)

3) Bestimme zu jedem $x_s \in M^*$ eine vorläufige Markierung
 $D^*(x_s) = \min (D(x_r) + d(x_r, x_s))$

weiter mit (4)

4) Markiere den Knoten $x_s^* := x_i$ endgültig mit $D(x_i) = D^*(x_i)$, für den gilt

$$D^*(x_s^*) := \min(D^*(x_s))$$

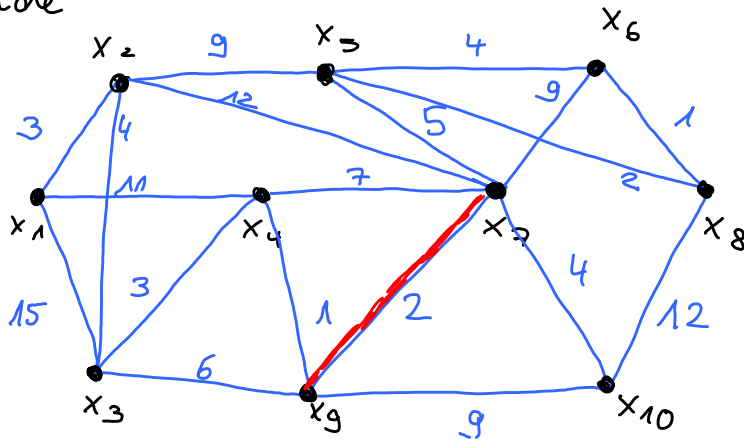
Markiere Kante (x_r, x_i)

weiter mit 5

5) Setze $M_{i+1} := M_i \cup \{x_i\}$ mit $i := i+1$

6) Ende

Bp.



Aufgabe: Suche von (x_7) die kürzesten Wege zu allen anderen Knoten

Schritt 1 : $D(x_7) = 0$ $M_1 := \{x_7\}$

Iteration 1: (direkte Nachbarn von x_7)

$$M^* = \{x_2, x_4, x_5, x_6, x_9, x_{10}\}$$

Ermittlung $D(x_s)$, $x_s \in M^*$

x_s	x_2	x_4	x_5	x_6	x_9	x_{10}
$D^*(x_s)$	12	7	5	9	<u>2</u>	4

Setze $D(x_s) = d(x_7, x_s)$

$$D^*(x_s) = \min(D(x_r) + d(x_r, x_s)) = 0 + 2 = 2$$

Damit $D(x_9) = 2$

Markiere die Kante (x_7, x_9)

Iteration 2

Ermittlung aller zu x_7 oder x_9 benachbarten Knoten

$$M^* := \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_{10}\}$$

Ermittlung der Entfernungen $D(x_s)$, $x_s \in M^*$

und zwar direkt oder über x_9 erreichbar von x_7

x_s	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_{10}
$D^*(x_s)$	12	8	$7 \text{ dir. v. } x_7$ $2+1$ $3 \text{ über } x_9$	5	9	4

für x_4 ist $D^*(x_4) = 3$

Setze $D(x_4) = 3$ und markiere die Kante (x_9, x_4)

Setze $M_3 = \{x_7, x_9, x_4\}$ die Menge der aktuell markierten Knoten

Iteration 3

Ermittle die zu x_7, x_9, x_4 benachbarten Knoten

$$M^* = \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_{10}\}$$

Ermittlung der Entfernungen $D(x_s)$

x_s	x_1	x_2	x_3	x_5	x_6	x_{10}
$D^*(x_s)$	14	12	6	5	9	4

$$D^*(x_{10}) = 4$$

Markiere die Kante (x_7, x_{10})

$$M_4 = M_3 \cup \{x_{10}\} = \{x_7, x_9, x_4, x_{10}\}$$

Iteration 4

$$M^* = \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_8\}$$

x_s	x_1	x_2	x_3	x_5	x_6	x_8
$D^*(x_s)$	14	12	$6+2=8$ $2+1+3=6$	5	9	16

$$D^*(x_5) = 5$$

Markiere die Kante (x_7, x_5)

$$M_5 = M_4 \cup \{x_5\} = \{x_7, x_9, x_4, x_{10}, x_5\}$$

Iteration 5

$$M^* = \{x_1, x_2, x_3, x_6, x_8\}$$

x_s	x_1	x_2	x_3	x_6	x_8
$D^*(x_s)$	14	12	6	9	7

$$D^*(x_3) = 6$$

Markiere die Kante (x_4, x_3)

$$M_6 = M_5 \cup \{x_3\} = \{x_7, x_9, x_4, x_{10}, x_5, x_3\}$$

Iteration 6

$$M^* = \{x_1, x_2, x_6, x_8\}$$

x_3	x_1	x_2	x_6	x_8
$D^*(x_3)$	14	10	9	7

$$D^*(x_8) = 7 \quad \text{Markiere die Kante } (x_5, x_8)$$

$$M_7 = M_6 \cup \{x_8\} = \{x_3, x_4, x_5, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$$

Iteration 7

$$M^* = \{x_1, x_2, x_6\}$$

x_5	x_1	x_2	x_6
$D^*(x_5)$	14	10	8

$$D^*(x_6) = 8 \quad \text{Markiere Kante } (x_6, x_8)$$

$$M_8 = M_7 \cup \{x_6\}$$

Iteration 8

$$M^* = \{x_1, x_2\}$$

x_3	x_1	x_2
$D^*(x_3)$	14	10

$$D^*(x_2) = 10 \quad \text{Markiere Kante } (x_3, x_2)$$

$$M_9 = M_8 \cup \{x_2\}$$

Iteration 9

$$M^* = \{x_1\}$$

$$D^*(x_1) = 13$$

x_5	x_1
$D^*(x_5)$	13

$$\text{Markiere Kante } (x_2, x_1)$$

Damit sind alle Knoten markiert

$$D(x_1) = 13 \quad (\text{It. 9})$$

$$D(x_2) = 10 \quad (\text{It. 8})$$

$$D(x_3) = 6 \quad (\text{It. 5})$$

$$D(x_4) = 3 \quad (\text{It. 2})$$

$$D(x_5) = 5 \quad (\text{It. 4})$$

$$D(x_6) = 8 \quad (\text{It. 7})$$

$$D(x_7) = 0 \quad \text{Start}$$

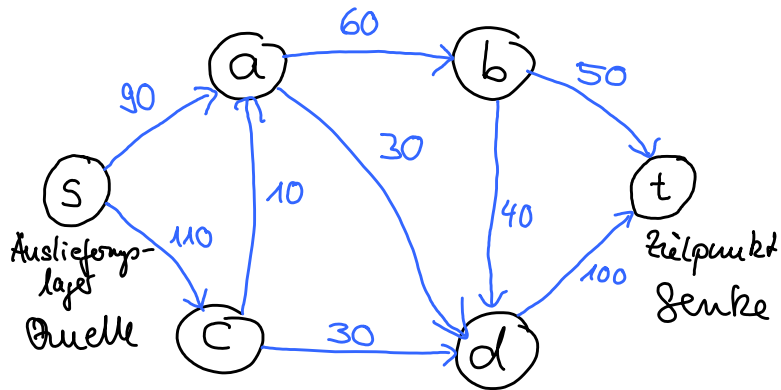
$$D(x_8) = 7 \quad (\text{It. } 6)$$

$$D(x_9) = 2 \quad (\text{It. } 1)$$

$$D(x_{10}) = 4 \quad (\text{It. } 3)$$

Flüsse und Schnitte in Graphen
Maximalflussproblem

Bp: Paketdienst



Netzwerk : gerichteter Graph mit Quelle und einer Senke

Def: s-t Fluss

Wert eines s-t-Flusses