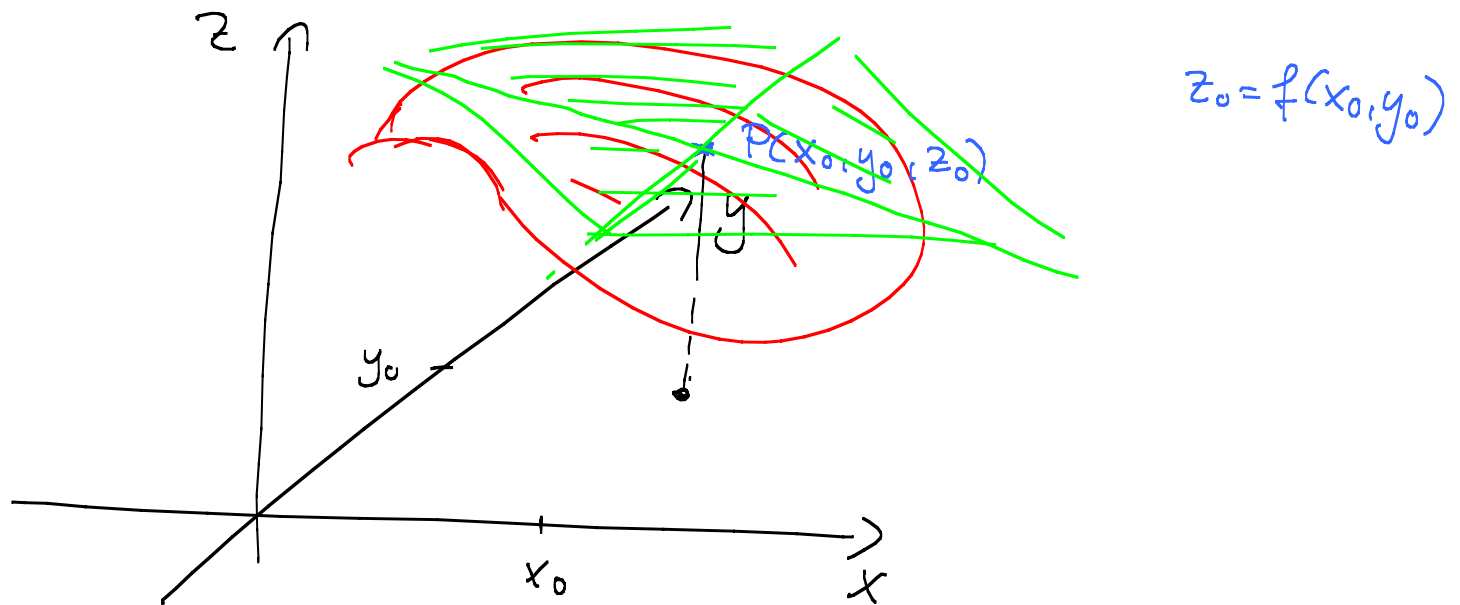


Mathe-Vorlesung

8.6.2015



Allg. Gleichung einer Ebene: $z = ax + by + c$

Aufstellen der Tangentialebenengleichung.

Auswertung von folgenden Eigenschaften

"Steigung" im Berührungspunkt "gleich"

$$z_x = a$$

$$z_y = b$$

Die partiellen Ableitung der Funktion $f(x, y)$

$$f_x(x, y)$$

$$f_y(x, y)$$

Im Berührungspunkt gilt:

$$P(x_0, y_0)$$

$$a = f_x(x_0, y_0)$$

$$b = f_y(x_0, y_0)$$

$P(x_0, y_0)$ liegt auch auf der Tangentialebene:

$$z_0 = a x_0 + b y_0 + c$$

$$\Rightarrow c = z_0 - a x_0 - b y_0$$

$$\Rightarrow c = z_0 - f_x(x_0, y_0) x_0 - f_y(x_0, y_0) y_0$$

Somit gilt:

$$z = \overbrace{f_x(x_0, y_0)}^a \cdot x + \overbrace{f_y(x_0, y_0)}^b \cdot y + \underbrace{z_0 - f_x(x_0, y_0) x_0 - f_y(x_0, y_0) y_0}_c$$

Häufig findet man:

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0) (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) (y - y_0)$$

Frage: Wie ändert sich die Höhenkoordinate bei Betrachtung des Punktes auf der Tangentialebene?

$$\underbrace{z - z_0} = f_x(x_0, y_0) \underbrace{(x - x_0)} + f_y(x_0, y_0) \underbrace{(y - y_0)}$$

$$x + \Delta x - x_0 = \Delta x = dx \quad y + \Delta y - y_0 = \Delta y = dy$$

$$dz = f_x(x_0, y_0) \cdot dx + f_y(x_0, y_0) \cdot dy$$

[Merke: Für "kleine" Änderungen gilt $\Delta z \approx dz$]

Def.: Totale Differential für zwei unabh. Variablen

$$z = f(x, y)$$

$$dz = f_x dx + f_y dy$$

$$\text{In } \mathbb{R}^n : z = f(x_1, \dots, x_n)$$

$$dz = f_{x_1} dx_1 + f_{x_2} dx_2 + \dots + f_{x_n} dx_n$$

"Addition von n partiellen Differentialen"

Bp: $z = f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

geg: $P(2, 1) \rightarrow P_1(2.5, 0.75)$
(P, P_1 in x, y -Ebene)

Berechnen Sie mit Hilfe des tot. Differentials die näherungsweise Änderung des Fkt.wertes!
Vergleichen Sie mit der wahren Änderung!

$$\textcircled{dz} = f_x(x_0, y_0) \cdot dx + f_y(x_0, y_0) \cdot dy$$

näherungsweise Änderung

$$\Delta z = \left| f(2.5, 0.75) - f(2, 1) \right|$$

wahre Änderung

Erinnerung:

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

$$dx = 0.5$$

$$dy = -0.25$$

$$f_x = \frac{2x}{x^2 + y^2}$$

$$f_y = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

$$f_x(2, 1) = \frac{4}{5} \quad f_y(2, 1) = \frac{2}{5}$$

$$dz = f_x(2,1) \cdot 0.5 + f_y(2,1) \cdot (-0.25)$$

$$dz = \frac{4}{5} \cdot 0.5 + \frac{2}{5} \cdot (-0.25)$$

$$= 0.4 + -\frac{2}{20}$$

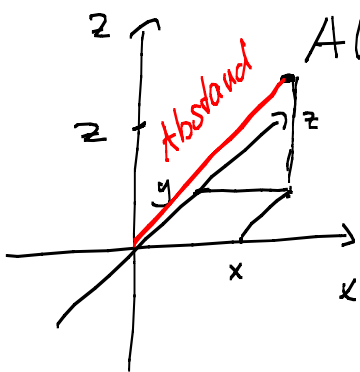
$$= 0.4 - 0.1 = \boxed{0.3}$$

$$\Delta z = \left| \ln(4+1) - \ln(2.5^2 + 0.75^2) \right|$$

$$= \left| 1.609 - 1.9187 \right|$$

$$= \left| -0.3097 \right| = \boxed{0.3097}$$

Bp: Geg: $P(x,y,z)$ in $\mathbb{R}^3$



Abstand vom Ursprung:

$$r(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Wie ändert sich der Abstand des Punktes $(1,2,0)$ wenn er nach $(0.9; 2.2; -0.1)$ verschoben wird?

$$dr = r_x \cdot dx + r_y \cdot dy + r_z \cdot dz$$

$$dx = -0.1 \quad dy = +0.2 \quad dz = -0.1$$

$$r_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad r_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad r_z = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$dr = \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Werte einsetzen: $dr = \frac{1 \cdot (-0,1) + 2 \cdot 0,2 + 0 \cdot (-0,1)}{\sqrt{1 + 4 + 0}}$

$$dr = \frac{-0,1 + 0,4}{\sqrt{5}} = 0,1342$$

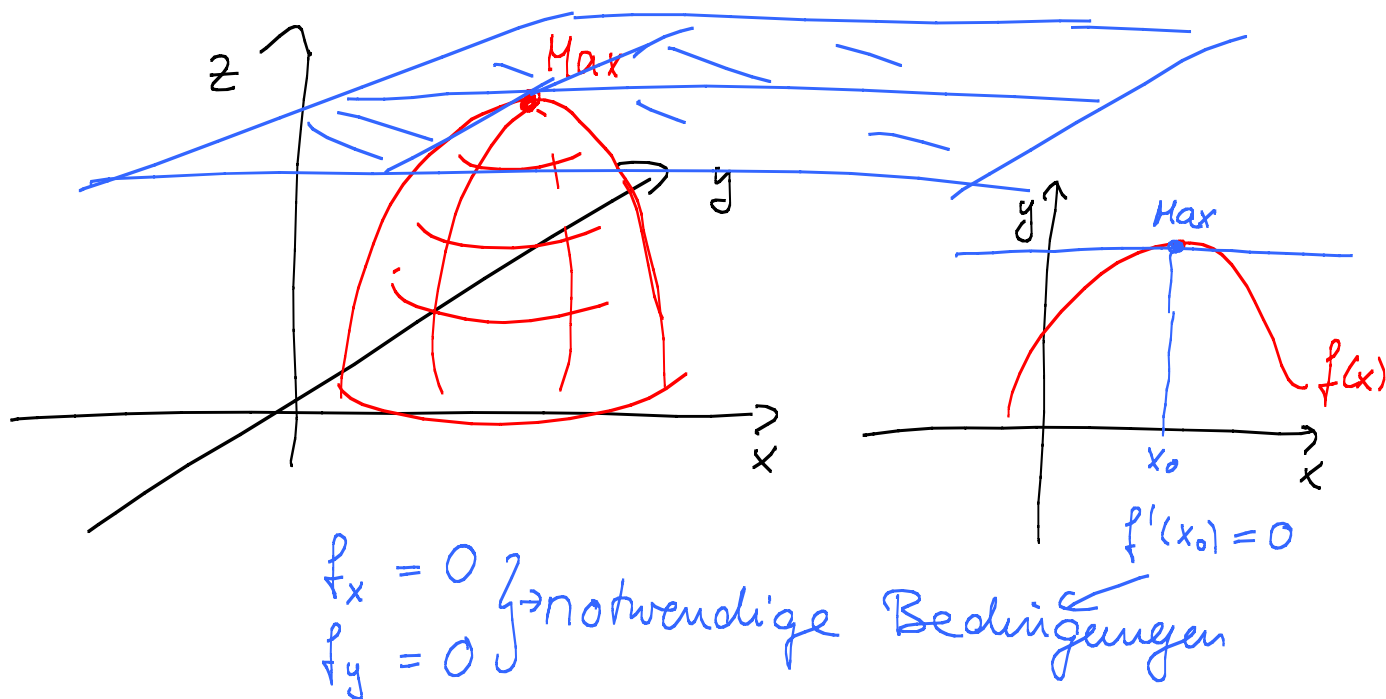
Reale Abstandsänderung:

$$|r(1,2,0) - r(0,9,2,2,-0,1)|$$

$$= |2,2361 - 2,3791| = 0,1430$$

Extremwerte bei mehrdimensionalen Funktionen

zunächst: 3D - Funktionen



Notwendige Bedingungen für Extremwerte
von $z = f(x_1, \dots, x_n)$

z hat einen möglichen Extremwert in $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$

wenn $f_{x_1}(\bar{x}) = f_{x_2}(\bar{x}) = \dots = f_{x_n}(\bar{x}) = 0$ Kandidat

sämtliche partielle Ableitungen "verschwinden"

hinreichende Bedingung für $z = f(x, y)$ 2 Variablen

$$\Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$$

$$f_{xx} < 0 \Rightarrow \text{Max}$$

$$f_{xx} > 0 \Rightarrow \text{Min}$$