

Vorlesung 15.6.15

nochmals zum Bp.:

$$z = f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1^3 - 3x_1 - x_2^2 + x_2 \cdot x_3 - x_3^2 + 3x_3}$$

$$x_{E_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_{E_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$H_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 6e^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$H_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 6e^{-2} & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -12e^{-2}$$

$$H_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = |6e^{-2}|$$

Regel von Sarrus

$$= 6 \cdot e^{-2} \cdot (-2) \cdot (-2) + 0 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 1 \\ - 0 \cdot (-2) \cdot 0 - 6e^{-2} \cdot 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \cdot (-2)$$

$$= +4 \cdot 6 \cdot e^{-2} - 6e^{-2} = (24 - 6) \cdot e^{-2} = 18e^{-2}$$

$$H_3 > 0 \quad \boxed{H_2 < 0} \quad H_1 > 0$$

Bei $x_{E_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist keine Aussage über die Art des Extremwertes möglich

Auswertung für $x_{E_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Sarrus

$$H_3 = \begin{vmatrix} -6e^2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & +1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \stackrel{\downarrow}{=} -18e^2 < 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} -6e^2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 12e^2 > 0$$

$$H_1 = |-6e^2| = -6e^2 < 0$$

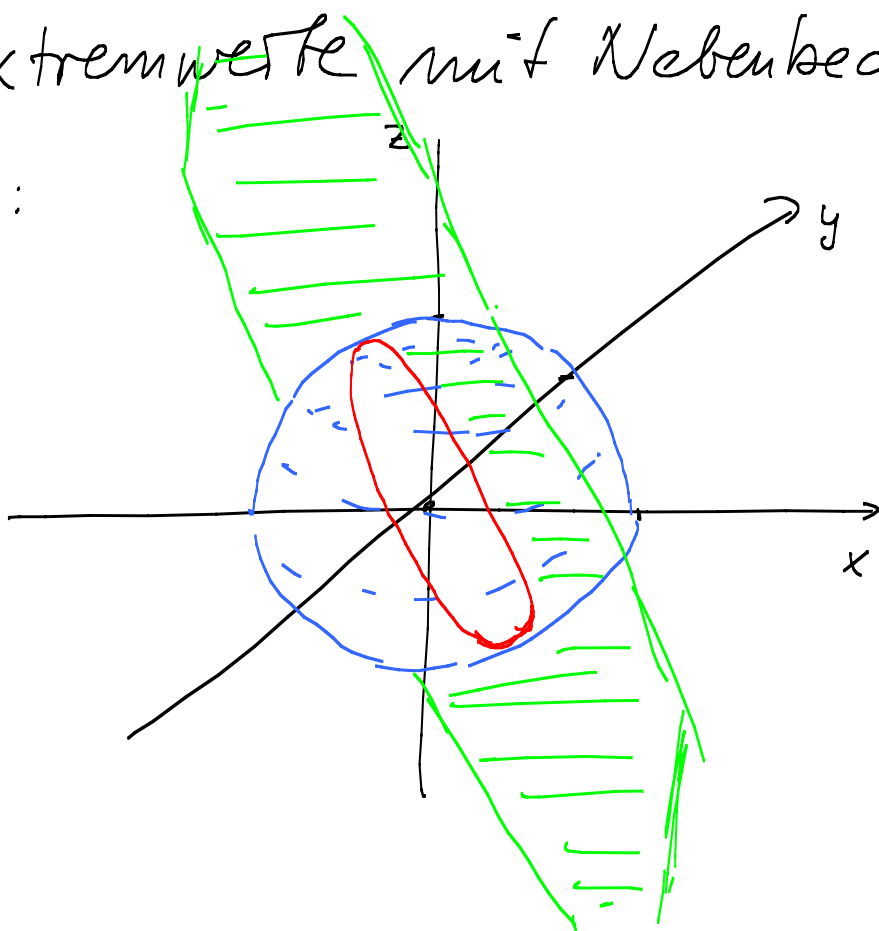
$$H_1 < 0, \quad H_2 > 0, \quad H_3 < 0$$

damit liegt ein lokales Maximum

bei $x_{E_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ vor.

Extremwerte mit Nebenbedingungen

Bp:



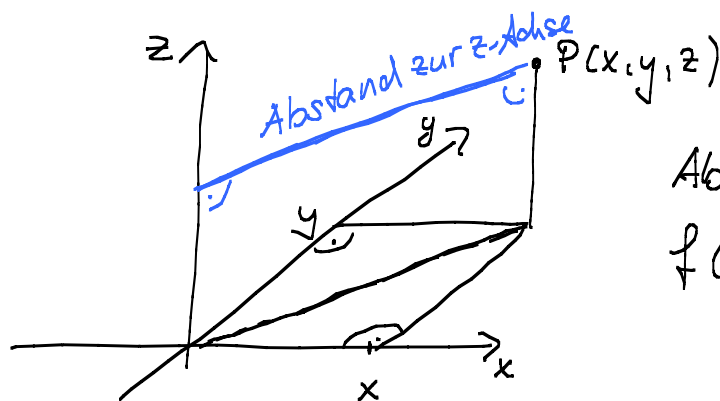
$$x+y+z=0$$

$P(x, y, z)$ liegt auf der Kugel : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
 $P(x, y, z)$ liegt auf der Ebene : $x + y + z = 0$

Nebenbed.

Welches ist der größte und welches der kleinste Abstand von P zur z -Achse?

Zielfunktion ist der "Abstand" zur z -Achse



Abstand:

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Math. Formulierung

Gesucht werden die Extremwerte von

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

unter den Nebenbedingungen

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (\text{Kugel})$$

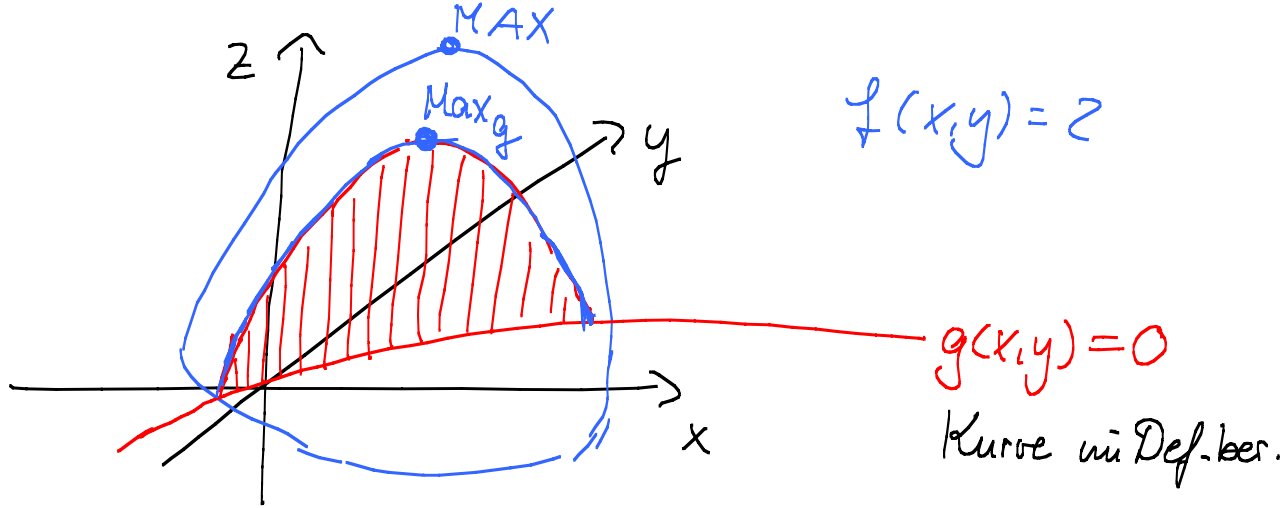
$$x + y + z = 0 \quad (\text{Ebene})$$

Eine Funktion mit zwei Nebenbedingungen
 (→ später)

Lösungswege müssen nun erarbeitet werden.

Geg: $z = f(x, y)$ Zielfunktion

Einschränkung : $g(x, y) = 0$
 (Restriktion, Nebenbedingung)



Die Nebenbedingung legt den Entscheidungsraum fest!

1) Lösung durch Variablensubstitution anhand eines Beispiels

$$z = f(x,y) = -x^2 - \frac{1}{2}y^2 + 4 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}_+^2$$

$$\text{NB : } g(x,y) = \underbrace{2 - 2x - y}_{\Downarrow} = 0 \quad (\text{implizite Darstellung})$$

$$y = 2 - 2x \quad (\text{Gerade})$$

Variablensubstitution : $y = 2 - 2x$ (NB) einsetzen
in $z = f(x,y)$

$$z = -x^2 - \frac{1}{2}(2 - 2x)^2 + 4$$

$$z = -x^2 - \frac{1}{2}(4 - 8x + 4x^2) + 4$$

$$z = -x^2 - 2 + 4x - 2x^2 + 4$$

$$z = -3x^2 + 4x + 2$$

$$z' = -6x + 4$$

$$z'' = -6$$

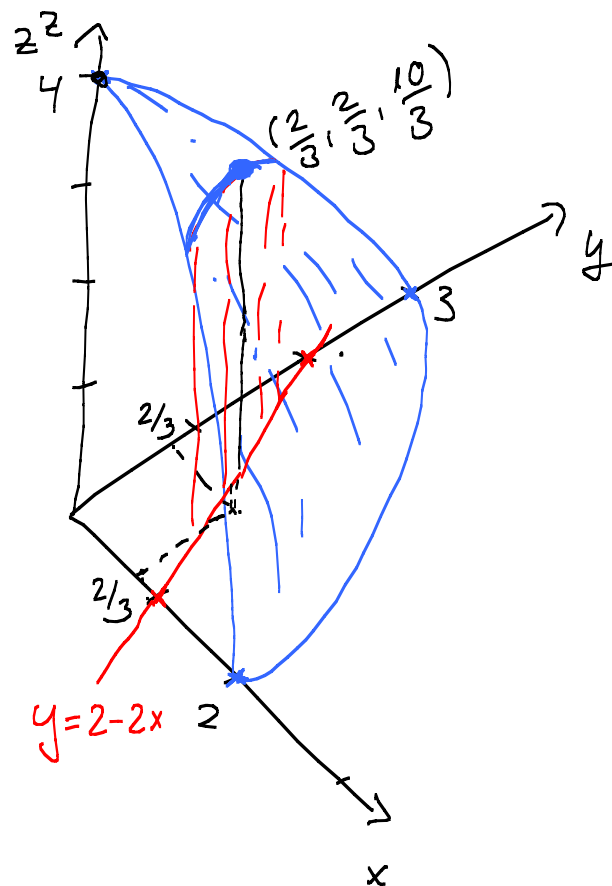
$$-6x + 4 = 0 \Leftrightarrow -6x = -4 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{2}{3} \text{ in } y = 2 - 2x \text{ einsetzen: } y = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

Kandidat bei $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

$$f(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = \frac{10}{3}$$

Lokales Maximum bei $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$



$$g(x,y) = 2 - 2x - y = 0$$

$$y = 2 - 2x$$

Nachteile der Methode der Variablensubstitution:

Nur geeignet bei Funktionen mit 2 unabh. Variablen
und die NB muss nach einer der beiden Variablen
aufgelöst werden können!

Nur geeignet bei einer NB.

Weitere, vielseitiger anwendbar:

Methode von Lagrange

Multiplikatorregel von Lagrange

Lagrange (1736 - 1813)

für Funktionen mit n Variablen und m
Nebenbed.

Prinzip : $z = f(x, y)$
 $g(x, y) = 0$ (Nebenbed. muss
in impliziter Form
vorliegen)

Lagrange: Die Extremwerte von $z = f(x, y)$ unter
der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$

liegen an den Stellen, an denen die Funktion

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y)$$

ihre Extremwerte annimmt!

λ heißt der **Lagrange-Multiplikator**

Die Extremwertbest. unter einer Nebenbedingung
wird auf eine globale Extremwertbest. zurück-
geführt!

Bp : $f(x, y) = -x^2 - \frac{1}{2}y^2 + 4$ $\mathbb{D} = \mathbb{R}_+^2$
2 Variablen
 $g(x, y) = 2 - 2x - y = 0$
1 NB

$$L(x, y, \lambda) = -x^2 - \frac{1}{2}y^2 + 4 + \lambda \cdot (2 - 2x - y) + 2\lambda - 2\lambda x - \lambda y$$

3 Variablen

notwendige Bedingungen:

$$L_x = -2x - 2\lambda = 0 \quad \text{I}$$

$$L_y = -y - \lambda = 0 \quad \text{II}$$

$$L_\lambda = 2 - 2x - y = 0 \quad \text{III}$$

Merke: die Ableitung nach λ liefert die Nebenbed.

$$\text{Aus II: } -y = +\lambda \quad *$$

$$* \text{ in I: } -2x + 2y = 0 \Leftrightarrow x = y \quad **$$

$$** \text{ in III: } 2 - 2x - x = 0 \Leftrightarrow 2 = 3x \\ \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$\text{Da } x = y : x = \frac{2}{3}, y = \frac{2}{3}$$

2. Beispiel: Dosenproblem

Es werden oben offene Dosen hergestellt mit
 $V = 1 \text{ Liter Volumen}$ (Radius r , Höhe h)

Frage: Abmessungen, damit der Materialverbrauch minimal ist

Math. Formulierung mit Lagrange-Methode

$$\text{Zielfunktion: } f(r, h) = 2r\pi \cdot h + \pi r^2$$

$$\text{Nebenbedingung: } g(r, h) = \pi r^2 \cdot h - 1000 = 0 \\ (\text{implizit})$$

$$L(r, h, \lambda) = 2r\pi h + \pi r^2 + \lambda(\pi r^2 h - 1000)$$

zu Hause lösen!