Bereiten Sie die Aufgaben parallel zu den in der Vorlesung besprochenen Themen für die nächsten Übungsstunden jeweils vor!
Dieses Blatt enthält am Ende noch ein paar Wiederholungsaufgaben aus den anderen Themenbereichen des Sommersemesters.

Aufgabe 1

Gegeben ist ein Graph G = (M,K,v) mit der Knotenmenge $M=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$
und der Kantenmenge $K=\{k_1,k_2,k_3,k_4,k_5,k_6,k_7,k_8,k_9,k_{10},k_{11},k_{12},k_{13}\}$
v sei die Abbildung, die jeder Kante aus K zwei Knoten aus M zuordnet und zwar in folgender Weise:

$v(k_1)=(x_1,x_2)$, $v(k_2)=(x_1,x_5)$, $v(k_3)=(x_2,x_5)$, $v(k_4)=(x_3,x_5)$,

$v(k_5)=(x_3,x_2)$, $v(k_6)=(x_3,x_7)$, $v(k_7)=(x_4,x_1)$, $v(k_8)=(x_4,x_5)$,

$v(k_9)=(x_5,x_8)$, $v(k_{10})=(x_6,x_8)$ $v(k_{11})=(x_5,x_6)$, $v(k_{12})=(x_5,x_7)$

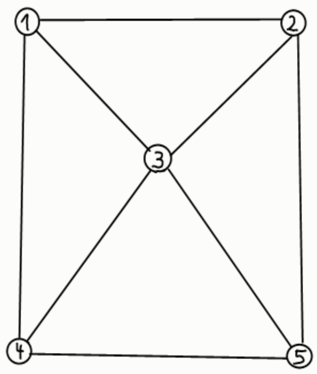
$v(k_{13})=(x_8,x_4)$

Bem.: Die Bezeichnung von Knoten und Kanten sowie der Abbildung v entspricht der Nomenklatur der Vorlesung.

a) Zeichnen Sie diesen Graphen
b) Ist dieser Graph schlicht?
c) Was ändert sich am Graphen, wenn statt der runden Klammern bei der Angabe der Abbildung die geschweiften Mengenklammern stehen?
d) Bestimmen Sie die Knotengrade der einzelnen Knoten.
e) Geben Sie für diesen Graphen die Adjazenzmatrix und die Inzidenzmatrix an.

Aufgabe 2

Gegeben ist folgender Graph:



Zeichnen Sie einen Teilgraphen und einen Untergraphen und erläutern Sie noch einmal die Unterschiede!

Aufgabe 3

Wie viele Kanten besitzt ein vollständiger ungerichteter Graph mit n Knoten? Beweisen Sie Ihre Aussage mit einem geeigneten Beweisverfahren (wenn Sie es nicht kennen, dann eignen Sie es sich an: Stichwort Vollständige Induktion)

Aufgabe 4

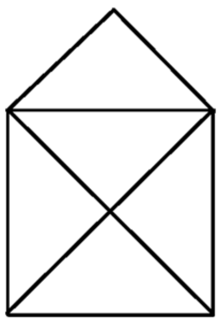
Zeichnen Sie einen Graphen mit folgenden Eigenschaften, die alle gelten sollen: Der Graph besitze 5 Knoten, er ist zusammenhängend und er ist schlicht, ein Knoten habe den Knotengrad 4, die anderen vier Knoten haben den Knotengrad 2. Zeichnen Sie auch Gerüste (=minimal aufspannende Bäume) dieses Graphen.

Aufgabe 5

Acht Personen vereinbaren, dass jede von ihnen mit genau drei der übrigen telefoniert. Ist das möglich? Wie sieht der Graph dazu aus? Bei welchen Zahlenkombinationen (Anzahl der Personen, Anzahl der Telefonpartner) ist dies allgemein möglich bzw. nicht möglich?

Aufgabe 6

a) Als Einleitung jeder Vorlesung mit dem Thema Graphentheorie wird das Königsberger Brückenproblem erläutert (s. Vorlesung). Dieses Problem wird häufig als Beginn der Graphentheorie bezeichnet. Zeichnen Sie sich noch einmal den Graphen auf, der zu diesem Brückenproblem gehört und überlegen Sie, wie man es, durch richtiges Hinzufügen von weiteren Brücken lösen kann!
b) Das Spiel „Haus vom Nikolaus“ besteht darin, unten stehende Figur ohne abzusetzen zu zeichnen. Das ist auch eine Art Brückenproblem, warum? Wo müssen Sie mit dem Stift ansetzen, damit das auch gelingt und warum gelingt das?

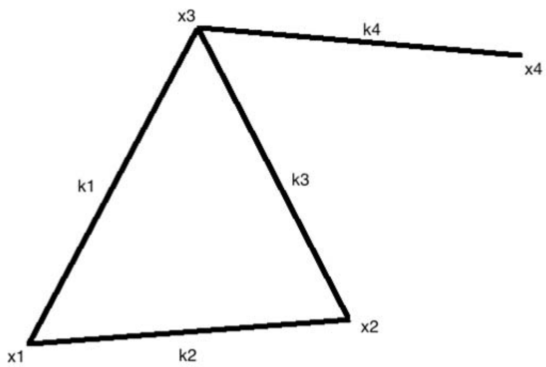


Aufgabe 7

a) Wie kann man anhand der Adjazenzmatrix feststellen, ob ein Graph isolierte Knoten besitzt?
b) Wie kann man anhand der Adjazenzmatrix feststellen, ob ein Graph Schleifen besitzt?
c) Wie kann der Knotengrad aus der Adjazenzmatrix bestimmt werden?

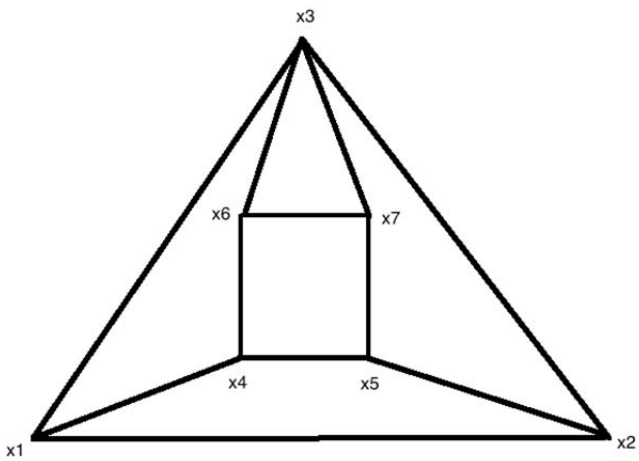
Aufgabe 8

Geben Sie in folgendem Graphen alle Eulersche Linien und alle Hamiltonsche Linien an:



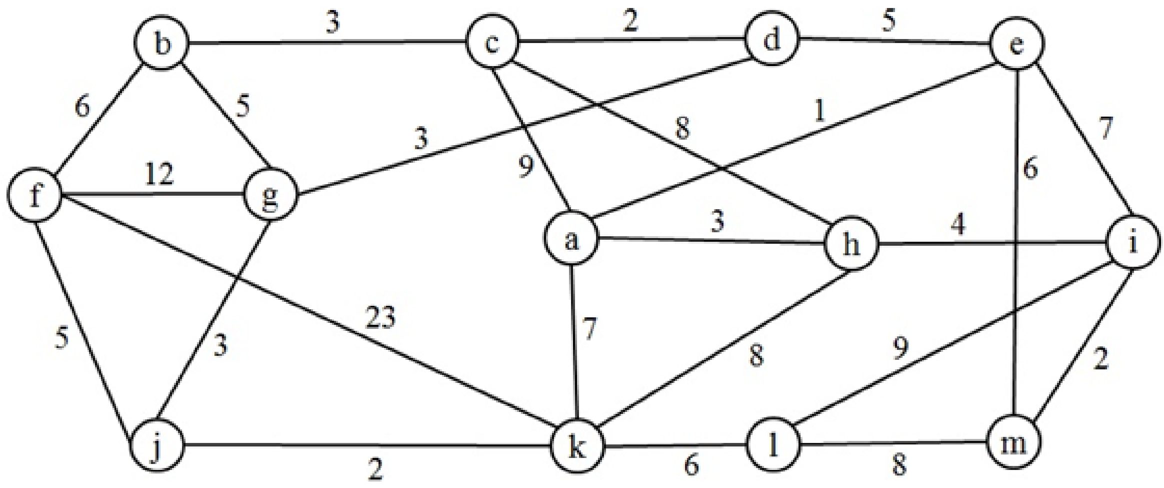
Aufgabe 9

Bestimmen Sie von folgendem Graphen die Adjazenzmatrix:



Aufgabe 10

Bestimmen Sie mit Hilfe des **Dijkstra-Algorithmus** die kürzesten Wege vom Knoten ⓐ zu allen anderen Knoten.



Aufgabe 11

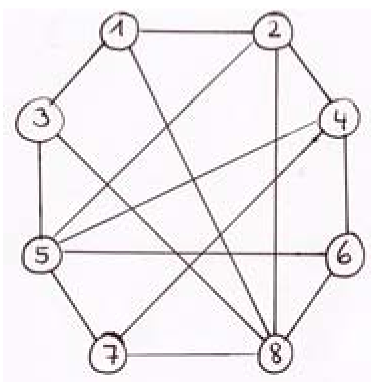
a) Konstruieren Sie den **Huffman-Baum** für folgende Aussage:

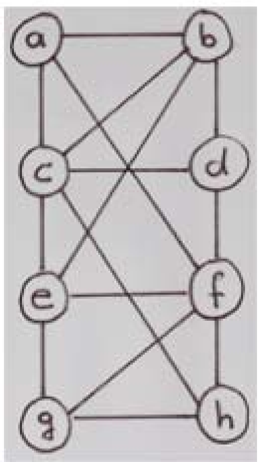
BISMARCK BISS MARC BIS INS MARK, BIS MARC BISMARCK BIS INS MARK BISS

Wie lautet der Code für das M, wie für das I ?

Aufgabe 12

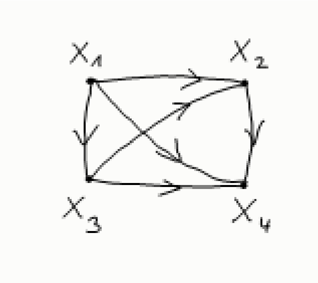
Sind die beiden folgenden Graphen **isomorph**? Wenn ja, geben Sie die zugehörige bijektive Abbildung (Isomorphismus) an und begründen Sie Ihr Vorgehen.





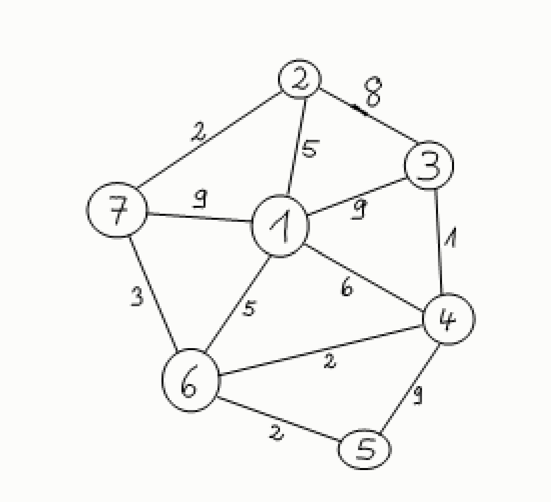
Aufgabe 13

Bestimmen Sie in folgendem Graphen jeweils die Anzahl der Wege der Länge 1,2 und 3. Gibt es Wege der Länge 4? Versuchen Sie noch einmal zu erklären, warum die Potenzen der Adjazenzmatrix des Graphen die Wege repräsentieren?



Aufgabe 14

Gegeben ist ein Streckennetz mit Zentrum 1 mit z.B. Kosten als Kantenbewertung! Gesucht ist ein minimal spanndender Baum. (Kruskal).
Geben Sie die minimalen Gesamtkosten an.



Im Folgenden finden Sie zu einigen Themen des Sommersemesters eine Aufgabe, beim Rückblick über den gesamten Stoff in der letzten Vorlesungsstunde können in der letzten Vorlesungsstunde noch weitere besprochen werden.

Aufgabe 1

Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale. Wenden Sie die passenden Integrationsregeln an:

a) $\int \frac{x}{\sqrt{x-2}}dx$ b) $\int \frac{x^2+1}{x^3+3x}dx$

c) Berechnen Sie den Inhalt der Flächen, die von den folgenden Funktionen eingeschlossen werden, machen Sie sich zunächst eine Skizze:

$y = \ln x$ und $x = 5$ und $y = 0$

Aufgabe 2

In einer Reihenhaussiedlung und in einem Hochhaus wurden die Haushalte nach der Anzahl ihrer Haustiere befragt. Die Ergebnisse sind in folgenden Tabellen dargestellt:

Reihenhaussiedlung

Anzahl Haustiere	Anzahl der Haushalte
0	10
1	15
2	6
3	3
4	1
5	1
6	1
7	2
8	1

Hochhaus

Anzahl Haustiere	Anzahl der Haushalte
0	8
1	6
2	2
3	1
4	1
5	1
6	1
7	0
8	0

a) Berechnen Sie jeweils den Median und das untere und obere Quartil.
b) Zeichnen Sie die beiden Boxplots und vergleichen Sie diese.

Aufgabe 3

In der Regel wird man beim Tippen einer Textseite die Seite nur zu 99% ohne Fehler tippen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in einem Buch mit 225 Seiten höchstens drei Seiten mit Druckfehlern finden lassen?

Aufgabe 4

Es werden Stangen der mittleren Länge 1000 mm hergestellt. Die Grundgesamtheit sei normalverteilt. Die Standardabweichung sei 0,8 mm.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Stange kürzer als 998 mm ist.
b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Stangenlänge im Intervall [1000 mm , 1002 mm] liegt.
c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Abweichung der Länge vom Mittelwert absolut kleiner als 1 mm ist.
d) Welcher bezüglich des Mittelwertes symmetrische Bereich der Längen lässt sich mit einer Sicherheit von 90 % garantieren?
e) Wie groß müsste die Standardabweichung sein, wenn bei 90 % aller Stangen die Toleranzgrenzen von $\mu \pm 1{,}2$ mm eingehalten werden sollen?

Aufgabe 5

a) Berechnen Sie im Bereich der komplexen Zahlen (die Zahlen sind in der kartesischen Form z=a+ib, i = imaginäre Einheit, gegeben. Die Ergebnisse sollten wieder in der kartesischen Form angegeben werden)

(1) $\left(2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\cdot i\right)^{7}$ (2) $\left(8\sqrt{2}+8\sqrt{2}\cdot i\right)^{\frac{1}{4}}$

b) Gegeben sind folgende komplexe Zahlen in Normalform :

$z_1 = 3 + 4i$ und $z_2 = a + 2i,$ $a \in \boldsymbol{R}$

Bestimmen Sie auf rechnerischem Weg a so, dass die Zeiger von z_1 und z_2 in der Gauß'schen Zahlenebene einen Winkel von 72° einschließen.