

Bereiten Sie die Aufgaben für Termine ab dem 18.05.15 so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen. (18.05.15: nur Aufgabe 9.1)

## Übungsblatt 9 Komplexe Zahlen

In den nachfolgenden Aufgaben bezeichnet  $i$  jeweils die imaginäre Einheit.

### Aufgabe 9.1 Rechnen mit komplexen Zahlen

Berechnen Sie:

- a)  $6+4i - (5 - 2i)$
- b)  $4i - 5 + i(1 - i)$
- c)  $|4 + 6i| - |4 - 6i|$
- d)  $\frac{3 + 2i}{3 - 2i}$
- e)  $\frac{i}{5 + 2i}$

Hinweis: Der Bruch zweier komplexer Zahlen „Zähler durch Nenner“ wird berechnet, indem man mit dem komplex-konjugierten Nenner erweitert:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*}$$

### Aufgabe 9.2 Darstellungsformen komplexer Zahlen

Ergänzen Sie die jeweils fehlenden Darstellungsformen

|    | kartesische Form | Polarform                                       |                 |
|----|------------------|---|-----------------|
|    |                  | trigonom. Form                                  | Exponentialform |
| a) | $i$              |   |                 |
| b) |                  |   | $2e^{i\pi}$     |
| c) |                  | $\cos(\frac{3}{2}\pi) + i \sin(\frac{3}{2}\pi)$ |                 |
| d) | $-3 + 6i$        |   |                 |
| e) | $4 - 12i$        |   |                 |

### Aufgabe 9.3

- a) Man berechne Real- und Imaginärteil von

$$z_1 = (1 - \sqrt{3} \cdot i)^5 \quad \text{und} \quad z_2 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + i) \right)^{20}$$

- b) Gegeben ist  $Z = -8 + 8i\sqrt{3}$ . Man berechne  $\sqrt[4]{Z}$ .

Bereiten Sie die Aufgaben für Termine ab dem 18.05.15 so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen. (18.05.15: nur Aufgabe 9.1)

### Aufgabe 9.4 Lösung algebraischer Gleichungen

Man bestimme für  $Z$  alle Lösungen  $Z_k \in \mathbf{C}$  in kartesischer Form.

Zeichnen Sie die  $Z_k \in \mathbf{C}$  in der komplexen Ebene!

a)  $z^6 - 64 = 0$

b)  $(2 + 2\sqrt{3} \cdot i)z = 8e^{i\pi}$

c)  $z^2 = i$

### Aufgabe 9.5

$\lambda$  sei eine beliebige reelle Zahl. Bestimmen Sie die zwei komplexen Lösungen der folgenden Gleichung mittels quadratischer Ergänzung:

$$z^2 - (\lambda - 2i)z - (1 + \lambda i) = 0$$

Ermitteln Sie Real- und Imaginärteile von  $Z_{1,2} \in \mathbf{C}$ . Stellen Sie beide Lösungen auch in der Exponentialform  $Z = r \cdot e^{i\varphi}$  dar.

### Aufgabe 9.6 Graphisches Rechnen mit komplexen Zahlen

Gegeben sind die beiden komplexen Zahlen:  $z_1 = 1 - 5i$ ;  $z_2 = 4 + 3i$ .

- Addieren und subtrahieren Sie die Zahlen graphisch in der Gaußschen Zahlenebene. Zeichnen Sie die konjugiert komplexe Zahl zu  $z_1$  ebenfalls ein.
- Man stelle  $Z_1$  und  $Z_2$  in Exponentialform dar. Bilden Sie nun  $Z_1^2$ ,  $\sqrt[3]{Z_1}$ ,  $Z_1 \cdot Z_2$  ebenfalls mit graphischen Methoden.

### Aufgabe 9.7 Additionstheoreme

Leiten Sie die "normalen" Additionstheoreme

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

aus der Eulerschen Formel (Satz S 11-4) her.